

SUR LES FRACTIONS CONTINUES DE J. MIKUSINSKI

PAR

TIBERIU POPOVICIU

(Cluj)

On donne une nouvelle démonstration de la suffisance de la condition (3) du théorème 1 de J. Mikusinski [2]. On donne aussi quelques autres propriétés des fractions continues arithmétiques de la forme $[a, \dot{b}, 2a]$.

1. Soit c un nombre naturel > 1 , différent d'un carré, $(r_n)_{n=0}^\infty$ la suite des réduits du développement de $\sqrt{c}$ en fraction continue arithmétique et $(x_n)_{n=0}^\infty$ la suite d'approximations de $\sqrt{c}$ donnée par la relation de récurrence

$$(1) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = [\sqrt{c}]$$

J. Mikusinski a démontré [2] le théorème suivant

THÉOREME 1. Pour que l'on ait

$$(2) \quad x_n = r_{2n-1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

il faut et il suffit que le nombre c soit de la forme

$$(3) \quad c = a^2 + \frac{2a}{b}$$

où a et b sont des nombres naturels.

J. Mikusinski a démontré très simplement la nécessité de la condition et a aussi démontré la suffisance de la condition en remarquant qu'alors la fraction continue de $\sqrt{c}$ est de la forme $[a, \dot{b}, 2a]$. Dans la suite nous allons d'abord donner une démonstration un peu différente de la suffisance de la condition (3).

Les nombres naturels c de la forme (3) sont caractérisés par la propriété que si $a = [\sqrt{c}]$, le nombre $2a$ est divisible par $c - a^2$.

2. Désignons par $r_n = \frac{P_n}{Q_n}$, $n = 0, 1, \dots$, les réduits de la fraction continue arithmétique périodique $[a, b, 2a]$. Les suites (P_n) , (Q_n) sont des solutions $(u_n)_{n=0}^\infty$ du système d'équations récurrentes

$$(4) \quad \begin{cases} u_{2n} = 2au_{2n-1} + u_{2n-2} \\ u_{2n+1} = bu_{2n} + u_{2n-1} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

avec respectivement les valeurs initiales $P_0 = a$, $P_1 = ab + 1$; $Q_0 = 1$, $Q_1 = b$.

Mais si $(u_n)_{n=0}^\infty$ est une solution du système (4), les suites partielles $(u_{2n})_{n=0}^\infty$, $(u_{2n+1})_{n=0}^\infty$ sont des solutions (v_n) de l'équation de récurrence

$$(5) \quad v_n = (2ab + 2)v_{n-1} - v_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

D'après la théorie, bien connue, des équations de cette forme nous avons $v_n = Ax^n + By^n$, $n = 0, 1, \dots$, où x, y sont les racines de l'équation caractéristique $z^2 - (2ab + 2)z + 1 = 0$ et A, B sont indépendants de n .

Si nous tenons compte de (3) nous avons

$$x = ab + 1 + b\sqrt{c} = \frac{b}{2a} \xi^2, \quad y = ab + 1 - b\sqrt{c} = \frac{b}{2a} \eta^2$$

où $\xi = a + \sqrt{c}$, $\eta = a - \sqrt{c}$. Nous avons donc

$$(6) \quad v_n = \left(\frac{b}{2a}\right)^n (A\xi^{2n} + B\eta^{2n}), \quad n = 0, 1, \dots$$

Pour obtenir les suites (P_n) , (Q_n) on détermine les suites partielles $(P_{2n})_{n=0}^\infty$, $(P_{2n+1})_{n=0}^\infty$, $(Q_{2n})_{n=0}^\infty$, $(Q_{2n+1})_{n=0}^\infty$, à l'aide des formules (6), en tenant compte respectivement des valeurs initiales $P_0 = a$, $P_2 = 2a^2b + 3a$; $P_1 = ab + 1$, $P_3 = 2a^2b^2 + 4ab + 1$; $Q_0 = 1$, $Q_2 = 2ab + 1$; $Q_1 = b$, $Q_3 = 2ab^2 + 2b$. Dans chacun de ces cas ces valeurs initiales déterminent les coefficients A, B correspondants.

En faisant les calculs, nous trouvons ainsi

$$(7) \quad \begin{cases} P_n = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2a}\right)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (\xi^{n+1} + \eta^{n+1}) \\ Q_n = \frac{1}{2\sqrt{c}} \left(\frac{b}{2a}\right)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (\xi^{n+1} - \eta^{n+1}) \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots$$

Il est clair que ces formules sont valables en général si a, b, c sont des nombres non nuls tel que $cb = a^2b + 2a$.

La réduction d'un système de la forme (4) à une équation du type (5) a été faite par Th. Angheluşă [1].

3. Revenant à notre problème, considérons la relation de récurrence (1). Nous avons

$$\frac{x_n - \sqrt{c}}{x_n + \sqrt{c}} = \left(\frac{x_{n-1} - \sqrt{c}}{x_{n-1} + \sqrt{c}}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x_0 = a$$

d'où il résulte que

$$(8) \quad \frac{x_n - \sqrt{c}}{x_n + \sqrt{c}} = \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{2^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

où bien

$$(9) \quad x_n = \sqrt{c} \frac{\xi^{2^n} + \eta^{2^n}}{\xi^{2^n} - \eta^{2^n}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Mais, de (7) il résulte que

$$r_n = \sqrt{c} \frac{\xi^{n+1} + \eta^{n+1}}{\xi^{n+1} - \eta^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

d'où l'égalité (2) s'ensuit immédiatement.

4. En remarquant que $|\eta| < \xi$, la formule (8) nous montre que la suite (x_n) converge vers $\sqrt{c}$. Mais on peut approximer $\sqrt{c}$ par d'autres suites itératives. Une telle suite $(y_n)_{n=0}^\infty$ est déterminée par la relation de récurrence

$$(10) \quad y_{n+1} = \frac{\alpha y_n + c}{y_n + \alpha}, \quad n = 0, 1, \dots$$

où nous supposons que $y_0 > 0$ et que α est un nombre rationnel positif. En nous limitant seulement à des approximations rationnelles de $\sqrt{c}$, le cas de α positif et irrationnel ne présente pas d'intérêt.

Tous les termes de la suite (y_n) sont positifs et nous avons

$$\frac{y_{n+1} - \sqrt{c}}{y_{n+1} + \sqrt{c}} = \frac{\alpha - \sqrt{c}}{\alpha + \sqrt{c}} \cdot \frac{y_n - \sqrt{c}}{y_n + \sqrt{c}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

d'où

$$(11) \quad \frac{y_n - \sqrt{c}}{y_n + \sqrt{c}} = \left(\frac{\alpha - \sqrt{c}}{\alpha + \sqrt{c}}\right)^n \cdot \frac{y_0 - \sqrt{c}}{y_0 + \sqrt{c}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

et, puisque $\left|\frac{\alpha - \sqrt{c}}{\alpha + \sqrt{c}}\right| < 1$, il résulte que la suite (y_n) converge vers $\sqrt{c}$.

La convergence de la suite (x_n) vers $\sqrt{c}$ est d'ordre 2 tandis que celle de la suite (y_n) seulement d'ordre 1.

Supposons que $\alpha = y_0 = [\sqrt{c}] = a$, alors de (11) il résulte que

$$y_n = \sqrt{c} \frac{\xi^{n+1} + \eta^{n+1}}{\xi^{n+1} - \eta^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

en continuant de poser $\xi = a + \sqrt{c}$, $\eta = a - \sqrt{c}$.

Cette formule nous montre que si le nombre c est de la forme (3) et si $\alpha = y_0 = a$, nous avons

$$(12) \quad y_n = r_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

donc que la relation de récurrence (10), avec la condition initiale $y_0 = [\sqrt{c}]$, nous donne précisément la suite des réduits de la fraction continue arithmétique de $\sqrt{c}$.

5. Proposons nous maintenant de déterminer le nombre naturel c (non carré) et le nombre rationnel (positif) α de manière que la relation de récurrence (10) donne précisément la suite des réduits $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ de la fraction continue arithmétique de $\sqrt{c}$.

Pour cela désignons par $a = [\sqrt{c}]$ et posons $c = a^2 + k$. Si $[a, b, d, e, \dots]$ est la fraction continue arithmétique de $\sqrt{c}$ et $r_0, r_1, r_2, r_3, \dots$, sont ses réduits successifs, de

$$r_1 = \frac{ab+1}{b} = a + \frac{1}{b} = \frac{\alpha a + a^2 + k}{a + \alpha}$$

il résulte

$$(13) \quad b = \frac{a + \alpha}{k}$$

De

$$r_2 = \frac{abd + a + d}{bd + 1} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{d}} = \frac{\alpha(ab+1) + b(a^2+k)}{ab+1+\alpha b}$$

il résulte

$$(14) \quad d = \frac{\alpha - a + kb}{2ab + 1 - kb^2}$$

En fin de

$$r_3 = a + \frac{1}{b + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}} = \frac{\alpha(abd + a + d) + (bd + 1)(a^2 + k)}{abd + a + d + \alpha(bd + 1)}$$

compte tenant de (13) et (14), nous déduisons

$$(15) \quad e = \frac{2\alpha}{k}$$

Mais les nombres b, e sont entiers (positifs), il en résulte donc que $2b - e = \frac{2a}{k}$ est aussi entier. Il en résulte que $2a$ est divisible par k , donc que le nombre c est de la forme (3). Dans ce cas $e = b$, donc $\alpha = a$.

Nous avons donc la propriété exprimée par le

THÉOREME 2. Pour que les $y_n, n = 0, 1, \dots$, donnés par la relation de récurrence (10), où c est un nombre naturel (non carré) et α un nombre rationnel positif, soient les réduits successifs de la fraction continue arithmétique de $\sqrt{c}$, il faut et il suffit que c soit de la forme (3) et que $\alpha = [\sqrt{c}] = a$.

6. Remarquons que si c est un nombre positif quelconque et si nous avons (1), avec $x_0 > 0$, il en résulte

$$\frac{x_n - \sqrt{c}}{x_n + \sqrt{c}} = \left(\frac{x_0 - \sqrt{c}}{x_0 + \sqrt{c}} \right)^{2^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

En tenant compte aussi de la formule (11), on voit que nous pouvons énoncer le

THÉOREME 3. Si c et α sont des nombres positifs et si les suites $(x_n)_{n=0}^{\infty}, (y_n)_{n=0}^{\infty}$ sont données par les relations de récurrence (1), (10), avec les valeurs initiales $x_0 = y_0 = \alpha$:

1° Elles convergent vers $\sqrt{c}$.

2° On a $x_n = y_{2^n - 1}, n = 0, 1, \dots$

Reçu le 3 mai 1967

Institut de Calcul
Académie de la République Socialiste de Roumanie,
Filiale de Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. ANGHELUȚĂ, TH. Intégration d'une classe d'équations linéaires aux différences finies. Bulletin de la Soc. des Sciences de Cluj, T. III (1926), 94-104.
2. MIKUSINSKI, J. Sur la méthode d'approximation de Newton. Annales Polon. Math., I (1954), 184-194.