

SUR LA DÉLIMITATION DE L'ERREUR DANS L'APPROXIMATION DES RACINES D'UNE ÉQUATION PAR INTERPOLATION LINÉAIRE OU QUADRATIQUE

PAR
TIBERIU POPOVICIU
(Cluj)

On précise d'abord la délimitation de l'erreur donnée par A. M. OSTROWSKI [1] dans l'approximation des racines d'une équation par interpolation linéaire. On donne aussi un résultat analogue dans le cas de l'interpolation quadratique.

1. Considérons une fonction réelle $f = f(x)$, définie et continue sur un intervalle I de longueur non nulle. Nous allons désigner par z une racine de l'équation

$$(1) \quad f(x) = 0$$

Nous désignerons par $[x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}; f]$ la différence divisée (d'ordre n) et par $L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}; f|x) = [x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}; f]x^n + \dots$ le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite sur les nœuds $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}$ qui ne sont pas nécessairement distincts. Lorsque les nœuds ne sont pas distincts, dans la différence divisée et dans le polynôme d'interpolation correspondants interviennent aussi les dérivées successives de la fonction f , d'après des règles bien connues.

2. Soient x_1, x_2 des points de I et y la racine du polynôme de Lagrange-Hermite $L(x_1, x_2; f|x)$. Proposons-nous de délimiter l'erreur $z - y$ de l'approximation y ainsi calculée de z , en faisant sur la fonction f certaines hypothèses convenables.

De $L(x_1, x_2; f|y) = f(z) = 0$ et de l'expression bien connue du reste de la formule d'interpolation de Lagrange-Hermite, nous déduisons que

$$(2) \quad \begin{aligned} L(x_1, x_2; f|y) - L(x_1, x_2; f|z) &= \\ &= f(z) - L(x_1, x_2; f|z) = [x_1, x_2, z; f](z - x_1)(z - x_2). \end{aligned}$$

Mais

$$L(x_1, x_2; f|y) - L(x_1, x_2; f|z) = [x_1, x_2; f](y - z)$$

et il en résulte que

$$(3) \quad [x_1, x_2; f](z - y) = -[x_1, x_2, z; f](z - x_1)(z - x_2)$$

Si nous supposons que $[x_1, x_2; f] \neq 0$, nous déduisons que

$$(4) \quad z - y = -\frac{[x_1, x_2, z; f]}{[x_1, x_2; f]}(z - x_1)(z - x_2)$$

C'est d'ailleurs une conséquence immédiate de l'application de la méthode de «regula falsi» et en particulier de celle de Newton si $x_1 = x_2$.

Si nous supposons que f ait une dérivée seconde sur I , nous avons

$$(5) \quad [x_1, x_2; f] = f'(\xi), \quad [x_1, x_2, z; f] = \frac{1}{2}f''(\xi_1)$$

où ξ respectivement ξ_1 , est (lorsque $x_1 \neq x_2$) à l'intérieur du plus petit intervalle contenant les points x_1, x_2 respectivement les points x_1, x_2, z . Si donc la dérivée f' de f ne s'annule pas sur I (plus généralement à l'intérieur du plus petit intervalle contenant les points x_1, x_2 , ou sur x_1 si $x_1 = x_2$), nous en déduisons

$$z - y = -\frac{f''(\xi_1)}{2f'(\xi)}(z - x_1)(z - x_2)$$

3. Les formules précédentes ont un sens seulement si la racine z existe et présente un intérêt seulement si y ne sort pas de l'intervalle I . Supposons que

$$0 < m_1 \leq |[x'_1, x'_2; f]| \leq M_1 < +\infty$$

$$0 < m_2 \leq |[x'_1, x'_2, x'_3; f]| \leq M_2 < +\infty$$

pour tous les groupes de 3 points distincts x'_1, x'_2, x'_3 de I . La fonction f a alors une dérivée continue, est strictement monotone et est convexe ou concave sur I . Alors si la fonction change de signe, la racine z existe et est unique. Le point y appartient au plus petit intervalle contenant les points x_1, x_2, z si $f(x_1)f(x_2) < 0$, ou bien si le point $x_1 = x_2$ est d'un côté convenable de z .

De (4) nous déduisons alors les délimitations suivantes de l'erreur $z - y$ de l'approximation y de z ,

$$\frac{m_2}{M_1}|z - x_1||z - x_2| \leq |z - y| \leq \frac{M_2}{m_1}|z - x_1||z - x_2|$$

Les coefficients $\frac{m_2}{M_1}, \frac{M_2}{m_1}$ de ces délimitations sont, en général, meilleurs que $\frac{m_2 m_1^2}{M_1^3}, \frac{M_2 M_1^2}{m_1^3}$ trouvés par A.M. Ostrowski [1].

4. Nous nous proposons d'obtenir un résultat analogue en considérant un polynôme d'interpolation sur 3 nœuds.

Supposons que la fonction f soit continue, strictement monotone et ait une racine z à l'intérieur de l'intervalle I . Considérons trois points $x_1, x_2, x_3 \in I$, non tous confondus, tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, $x_1 < z < x_3$. Alors le polynôme de Lagrange-Hermite $L(x_1, x_2, x_3; f|x)$ a une racine y' (et une seule) sur l'intervalle (x_1, x_3) . Si nous posons pour le moment $L(x_1, x_2, x_3; f|x) = L(x)$, la formule, analogue à (2),

$$(6) \quad L(y') - L(z) = [x_1, x_2, x_3, z; f](z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)$$

servira pour la délimitation de l'erreur $z - y'$ de l'approximation y' de z .

Si $L(y') \neq L(z)$ de (6) il résulte que

$$(7) \quad z - y' = -\frac{[x_1, x_2, x_3, z; f]}{[y', z; L]}(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)$$

5. Pour aller plus loin remarquons que la dérivée $L'(x)$ étant de degré 1 et $y', z \in (x_1, x_3)$ la différence divisée $[y', z; L]$ est comprise entre $L'(x_1)$ et $L'(x_3)$.

En faisant les calculs, nous trouvons

$$L'(x_1) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_1} \{2[x_1, x_2; f] - [x_2, x_3; f]\} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} [x_1, x_2; f]$$

$$L'(x_3) = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \{2[x_2, x_3; f] - [x_1, x_2; f]\} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} [x_2, x_3; f]$$

Si $\lambda \leq [x'_1, x'_2; f] \leq \mu$ pour tout $x'_1, x'_2 \in I$, nous trouvons que

$$(8) \quad \min(\lambda, 2\lambda - \mu) \leq L'(x_1), L'(x_3) \leq \max(\mu, 2\mu - \lambda)$$

Supposons maintenant que la fonction f vérifie les conditions

$$(9) \quad \begin{cases} 0 < m_1 \leq |[x'_1, x'_2; f]| \leq M_1 < +\infty \\ 0 < m_3 \leq |[x'_1, x'_2, x'_3, x'_4; f]| \leq M_3 < +\infty \end{cases}$$

pour tout groupe de 4 points distincts x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 de I et que $M_1 < 2m_1$.

De la première condition (9) il résulte que la différence divisée $[x'_1, x'_2; f]$ est de signe invariable (autrement elle s'annulerait aussi, ce qui est impossible). Nous avons donc, ou bien $0 < m_1 \leq [x'_1, x'_2; f] \leq M_1$ pour tout $x'_1, x'_2 \in I$ ou bien $-M_1 \leq [x'_1, x'_2; f] \leq -m_1 < 0$ pour tout $x'_1, x'_2 \in I$.

De (8) il résulte donc que $0 < 2m_1 - M_1 = \min(m_1, 2m_1 - M_1) \leq |L'(x_1)|, |L'(x_3)| \leq \max(M_1, 2M_1 - m_1) \leq 2M_1 - m_1$ et la formule (7) nous donne la delimitation

$$\begin{aligned} \frac{m_3}{2M_1 - m_1} |z - x_1| |z - x_2| |z - x_3| &\leq |z - y'| \leq \\ &\leq \frac{M_3}{2m_1 - M_1} |z - x_1| |z - x_2| |z - x_3|. \end{aligned}$$

Reçu le 3 mai 1967

Institut de Calcul
Académie de la République Socialiste
de Roumanie, Filiale de Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. OSTROWSKI, A. M., *Solution of Equations and Systems of Equations*, 1966.