## me bulletelligens, that thebut the Modelman $\#=\pi\pm\sum_i f_i(f_i-f_i)$ on Millianum winds this Manger F., who much A., B. C.S. F. a. Franci No. and the Statement of the No. of State appellants. When the state of the last $R_{\rm b} = 8000$ /L to the late, and metabolish, all the Robins Millergerschafter are collecmeeting (R1); the than some that that, an edited man-**海田海田** with a the majorational graduate States positive flow up, and water martin that Transaction whether and Wastengthamach, Transaction and our, that the Appropriate and a superior of the second statement of the second of the second second that the Witnessprachafferback them the pales Work is in a harristic Work. With the second state of t 1915, harranteen die Weste W - Wat 1918 and after suffer die - W - W ture, the mass is a mile stray according to a Dearly stray Constitution of States

Strangenger on the colonie (Ast) Section of Assessed

SECULIARIES.

these deer, remain man our Tot o grandpoor value Warte up, the countries.

Indicates believing made the construction. We interesting made, that its management for an interest the contract of the contra

To the Control, the Palaces describe describe about a parameter displacation of one approximate the control of the Control of

M. M. Mary resonance of collection these to properly experience once problems elements of collection there are properly experience on problems.

на принява для намен влени развише и дорганизата поинтипра-

## REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE CAUCHY RELATIF AUX SÉRIES À TERMES CONSTANTS, NON-NÉGATIFS ET NON-CROISSANTS

PAR

## TIBERIU POPOVICIU

(Cluj)

On établit des conditions dans lesquelles, de la convergence, respectivement de la divergence de la série (4), résulte celle de la série (1). Les suites  $(u_n)$ ,  $(c_n)$  sont soumises à certaines restrictions de non-négativité ou de monotonie.

1. A. L. Cauchy a démontré [2] que si la suite  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  est non-négative et non-croissante, les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n u_{2n}$$

sont toujours de la même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

O. Schlömilch a généralisé [6] cette propriété de la manière suivante : Si la suite de nombres entiers  $(g_n)_{n=0}^{\infty}$  vérifie les propriétés

$$g_n > g_{n-1} \ge 0$$
,  $g_{n+1} - g_n \le M(g_n - g_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, ...$ 

où M est un nombre positif, les séries (1) et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (g_{n+1} - g_n) u_{g_n}$$

sont de la même nature, quelle que soit la suite  $(u_n)$  non-négative et non-croissante. J. C. Kluyver a encore précisé ce résultat [3].

Dans la suite, en complétant ces résultats, nous nous proposons de trouver des conditions suffisantes et nécessaires que doit vérifier la suite

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XIII, No 7, p. 1017-1025, BUCAREST, 1968

non-négative  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$  (la suite des multiplicateurs) telles que, quelle que soit la suite  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  non-négative et non-croissante, les séries (1) et

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$$

soient de la même nature.

Nous allons examiner un problème analogue, en soumettant la suite  $(u_n)$  à une condition, en général, moins restrictive que la non-croissance.

2. D'après K. Knopp [4] on dit que la suite  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  est  $\alpha$ -fois monotone si on a

(5) 
$$\Delta^{\alpha}u_{n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{\alpha}{\nu} u_{n+\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu-\alpha-1}{\nu} u_{n+\nu} \ge 0, \qquad n=0,1,\ldots$$

les séries du second membre étant convergentes.

Pour  $\alpha=0$  nous avons  $\Delta^0u_n=u_n$  et nous obtenons les suites non-négatives et pour  $\alpha=1$  nous avons  $\Delta^1u_n=u_n-u_{n+1}$  et nous obtenons les suites non-croissantes. Enfin  $\Delta^{-1}u_n$  ( $\alpha=-1$ ) se réduit à la série  $\sum_{\nu=0}^{\infty}u_{n+\nu}$ .

A vrai dire pour  $\alpha > 0$  la définition de K. Knopp est un peu plus restrictive puisqu'il considère seulement des suites  $(u_n)$  non-négatives, hypothèse que nous admettrons toujours dans la suite. Si  $\alpha > 0$ , une suite  $(u_n)$  dont tous les termes sont égaux à un même nombre quelconque (positif, nul on négatif) est  $\alpha$ -fois monotone puisqu'alors  $\Delta^{\alpha} u_n = 0$ ,  $n = 0, 1, \ldots$ 

Désignons par

(6) 
$$\Delta_m^{\alpha} u_n = \sum_{\nu=0}^m {\binom{\nu - \alpha - 1}{\nu}} u_{n+\nu}, \qquad m = 0, 1, \dots$$

les sommes partielles de la série du second membre de (5).

Les différences d'ordre  $\alpha$  (5), pour  $\alpha$  réel quelconque, ont été introduites par A. F. Andersen [1]. Ce même auteur considère les sommes (6) (avec une notation un peu différente).

3. Dans la suite nous considérons seulement le cas  $0 \le \alpha \le 1$ . Nous avons alors le

LEMME 1. Si  $0 \le \alpha \le 1$ , pour que la suite  $(u_n)_{n=0}^{\alpha}$  soit  $\alpha$ -fois monotone, il faut et il suffit que

$$\Delta_n^{\alpha} u_n \geq 0, \qquad m, n = 0, 1, \ldots$$

Remarquons que (si  $0 \le \alpha \le 1$ ) nous avons  $\binom{\nu-\alpha-1}{\nu} \le 0$ ,  $\nu = 1, 2, \ldots$  (l'égalité n'est d'ailleurs pas possible si  $0 < \alpha < 1$ ). Nous pouvons passer à la démonstration du lemme.

La condition est nécessaire. En effet, si  $m \ge 0$ , la série  $\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \binom{\nu-\alpha-1}{\nu} u_{n+\nu} \text{ est convergente et à termes non-positifs. De } \Delta^{\alpha} u_n \ge 0$  il résulte donc

$$\Delta_n^{\alpha} u_n = -\sum_{\nu=m+1}^{\infty} {\binom{\nu-\alpha-1}{\nu}} u_{n+
u} \ge 0, \qquad m=0, 1, \ldots$$

La condition est suffisante. De (7) il résulte que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} {\nu-\alpha-1 \choose \nu} u_{n+\nu} \ge -u_n, \qquad m=1, 2, \ldots$$

ce qui nous montre que la série  $\sum_{\nu=1}^{\infty} {\nu-\alpha-1 \choose \nu} u_{n+\nu}$ , à termes non-positifs, est convergente. La propriété en résulte.

Le lemme 1 est donc démontré.

4. Dans la suite nous ferons usage d'une importante généralisation de la célèbre formule de transformation d'Abel. Cette formule générale est aussi due à A. F. Andersen [1] et on peut l'écrire sous la forme symétrique

$$\sum_{\nu=0}^n a_{n-\nu}b_{\nu} = \sum_{\nu=0}^n \Delta_{\nu}^{-\alpha} a_{n-\nu} \cdot \Delta_{n-\nu}^{\alpha} b_{\nu},$$

où α est un nombre quelconque.

Nous écrivons cette formule sous la forme suivante

(8) 
$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu}b_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} {\alpha+\nu-\mu-1 \choose \nu-\mu} a_{\mu}\right) \Delta_{n-\nu}^{\alpha}b_{\nu}$$

Remarquons que  $\sum_{\nu=0}^{n} {\alpha+n-\nu-1 \choose n-\nu} := {\alpha+n \choose n}$  et posons

(9) 
$$C_{n} = \frac{1}{\binom{\alpha+n}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha+n-\nu-1}{n-\nu} c_{\nu}, \quad n=0, 1, \ldots$$

et

(10) 
$$C_{m,n} = \frac{1}{\binom{\alpha+n}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha+n-\nu-1}{n-\nu} e_{m+\nu}, \quad m, n=0, 1, \ldots$$

qui ont un sens si  $0 \le \alpha \le 1$  (même pour d'autres valeurs de  $\alpha$ , par exemple pour  $\alpha > -1$ ).

Nous avons  $C_{0,n} = C_n$ , n = 0, 1, ...

Pour  $\alpha = 0$ , les formules (9), (10) reviennent à  $C_n = e_n$ ,  $C_{m,n} = e_{m+n}$  respectivement.

Nous avons la formule

(11) 
$$C_{m+1, u} = \frac{(\alpha + n + 1) C_{m, n+1} - \alpha C_m}{n+1}.$$

5. De la formule (11) il résulte que  $\lim_{n \to \infty} C_{m,n}$ ,  $\lim_{n \to \infty} C_{m,n}$  sont indépendants de m. En particulier donc nous avons

(12) 
$$\underline{\lim} \ C_n = \underline{\lim} \ C_{m \cdot n}, \ \overline{\lim} \ C_n = \overline{\lim} \ C_{m \cdot n}$$

pour toute valeur de l'indice m. Nous en déduisons le

LEMME 2. 1°. Pour que l'on ait  $\lim_{n \to \infty} C_n > 0$  il faut et il suffit qu'il existe un indice m tel que inf  $C_{m,n} > 0$ .

2°. Pour que l'on ait  $\overline{\lim} C_n < +\infty$  il faut et il suffit qu'il existe un indice m tel que  $\sup_{m,n} C_{m,n} < +\infty$ .

Démontrons la première partie du lemme. Si  $\underline{\lim} \ C_n > 0$ , la suite  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$  doit contenir une infinité de termes positifs. Si  $\underline{m}$  est un indice tel que  $c_m > 0$ , on a  $C_{m,n} > 0$ ,  $n = 0, 1, \ldots$  Nous avons alors  $\inf \ C_{m,n} > 0$ , car autrement (si donc  $\inf \ C_{m,n} = 0$ ) il en résulterait  $\underline{\lim} \ C_{m,n} = 0$ , ce qui contredit la première formule (12). Réciproquement, de  $\inf \ C_{m,n} > 0$  il résulte  $\underline{\lim} \ C_{m,n} > 0$ , donc  $\underline{\lim} \ C_n > 0$ , d'après la formule (12).

Passons à la démonstration (plus simple) de la seconde partie du lemme 2.

Ceci résulte du fait qu'une suite est bornée supérieurement si et seulement si sa limite supérieure est  $< + \infty$ . D'ailleurs,  $\overline{\lim} C_n$  et  $\overline{\lim} C_{m \cdot n}$ , quel que soit m, sont en même temps finis ou infinis.

6. Désignons maintenant par  $s_n$ ,  $n=0, 1, \ldots$ , les sommes partielles de la série (1) et par  $t_n$ ,  $n=0, 1, \ldots$ , les sommes partielles de la série (4). En appliquant la formule de transformation (8), nous en déduisons  $(t_{-1}=0)$ 

(13) 
$$t_{m+n} - t_{m-1} = \sum_{\nu=0}^{n} c_{m+\nu} u_{m+\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} C_{m,\nu} {\alpha+\nu \choose \nu} \Delta_{n-\nu}^{\alpha} u_{m+\nu}, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

et, en particulier (en prenant  $c_n = 1$ , n = 0, 1, ..., et  $s_{-1} = 0$ )

(14) 
$$s_{m+n} - s_{m-1} = \sum_{\nu=0}^{n} {\alpha + \nu \choose \nu} \Delta_{n-\nu}^{\alpha} u_{m+\nu}, \quad m, \ n = 0, 1, \ldots$$

Nous allons maintenant démontrer le

THÉORÈME 1. Si  $0 \le \alpha \le 1$  et si la suite  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  est non-négative et  $\alpha$ -fois monotone :

1°. Lorsque la suite non-négative  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$  vérifie l'inégalité  $\underline{\lim} \ C_n > 0$ , de la divergence de la série (1) résulte celle de la série (4).

2°. Lorsque la suite non-négative  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$  vérifie l'inégalité  $\overline{\lim} C_n < +\infty$ ,

de la convergence de la série (1) résulte celle de la série (4).

Si la suite  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  a seulement un nombre fini de termes différents de zéro, les séries (1) et (4) sont toujours toutes les deux convergentes et le théorème 1 en résulte.

Dans le cas contraire (si donc une infinité de  $u_n$  sont différents de zéro), supposons  $\lim_{n \to \infty} C_n > 0$ . D'après le lemme 2, il existe un indice m tel que inf  $C_{m,n} > 0$ . Il existe alors un N tel que  $s_{m+n} - s_{m-1} > 0$  pour n > N. De (13) et (14) il résulte que

$$0 < \inf_{p} C_{m,p} \le \min(C_{m,0}, C_{m,1}, \dots, C_{m,n}) \le$$

$$\le \frac{t_{m+n} - t_{m-1}}{s_{m+n} - s_{m-1}}, \text{ pour } n > N$$

d'où résulte la première partie du théorème 1, en vertu des propriétés des séries à termes non-négatifs et de la première formule de la moyenne (relative aux moyennes arithmétiques pondérées).

La seconde partie du théorème résulte de la même manière de la formule

$$\begin{split} \frac{t_{m+n}-t_{m-1}}{s_{m+n}-s_{m-1}} & \leq \max(C_{m,0}, C_{m,1}, \ldots, C_{m,n}) \leq \\ & \leq \sup C_{m,p} < +\infty, \text{ pour } n > N \end{split}$$

en supposant que sup  $C_{m,n}<+\infty$ , le nombre N étant toujours déterminé tel que  $s_{m+n}-s_{m-1}>0$  pour n>N.

Du théorème 1 résulte le

COROLLAIRE 1. Si  $0 \le \alpha \le 1$  et si la suite  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$  vérifie les inégalités

$$0 < \lim C_n \leq \overline{\lim} C_n < + \infty,$$

où les  $C_n$  sont donnés par les formules (9), les séries (1) et (4) sont de la même nature.

Remarques. La généralité plus ou moins grande des conditions du théorème 1 résulte, d'une part, du fait que d'après K. Knopp [4] si  $0 \le \beta \le \alpha \le 1$  toute suite  $\alpha$ -fois monotone (et tendant vers 0) est aussi  $\beta$ -fois monotone et, d'autre part, si pour mettre en évidence l'ordre  $\alpha$ , nous désignons par  $C_n^{(\alpha)}$  les expressions (9), nous avons

$$C_n^{(lpha)} = rac{1}{inom{lpha+n}{n}} \sum_{
u=0}^n inom{lpha-eta+n-
u-1}{n-
u} inom{eta+
u}{
u} C_
u^{(eta)}.$$

On a

$$\sum_{\nu=0}^{n} {\alpha-\beta+n-\nu-1 \choose n-\nu} {\beta+\nu \choose \nu} = {\alpha+n \choose n}$$

tous les termes de la somme du premier membre étant  $\geq 0$ . Remarquons aussi que, pour tout  $\nu$  donné, on a

$$\frac{\binom{\alpha-\beta+n-\nu-1}{n-\nu}\binom{\beta+\nu}{\nu}}{\binom{\alpha+n}{n}} = \frac{\binom{\beta+\nu}{\nu}\binom{n}{\nu}}{\binom{\alpha+n}{\nu}} \prod_{\gamma=0}^{n-\nu-1} \left(1 - \frac{\beta+1}{\alpha+\gamma+1}\right) \to 0$$

pour  $n \to 0$ . Il résulte alors de la théorie de la sommabilité par séries divergentes que

$$\underline{\lim} \ C_n^{(\beta)} \leq \underline{\lim} \ C_n^{(\alpha)} \leq \underline{\lim} \ C_n^{(\alpha)} \leq \overline{\lim} \ C_n^{(\beta)}.$$

Pour le cas  $\alpha = 1$  nous allons donner un résultat plus complet.

7. Pour être complet nous allons examiner d'abord le cas  $\alpha = 0$ , qui est d'ailleurs bien connu dans la théorie des séries. Nous avons le Théorème 2. Si la suite  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  est non-négative:

1°. Pour que de la divergence de la série (1) résulte celle de la série (4), il faut et il suffit que l'on ait  $\lim c_n > 0$ .

2°. Pour que de la convergence  $\overline{de}$  la série (1) résulte celle de la série (4), il faut et il suffit que l'on ait  $\overline{\lim}$   $c_n < +\infty$ .

On suppose, bien entendu, que la suite  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$  est non-négative. La suffisance des conditions résulte du théorème 1. Il reste à démontrer que ces conditions sont aussi nécessaires.

Nous montrerons d'abord que si  $\lim c_u = 0$ , on peut trouver une série (1) divergente telle que la série (4) soit convergente. En effet, dans ce cas, on peut trouver une suite partielle (infinie)

$$(15) e_{n_1}, e_{n_2}, \ldots, e_{n_k}, \ldots$$

de  $(c_n)$  telle que l'on ait

$$c_{n_k} < rac{1}{k}$$
,  $k = 1, 2, \ldots$ 

Il suffit alors de considérer la série (1), où

$$u_n = 0, \quad n \neq n_k, \quad u_{n_k} = \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Montrons maintenant que si  $\overline{\lim} c_n = +\infty$ , on peut trouver une série (1) convergente telle que la série correspondante (4) soit divergente. Dans ce cas on peut trouver la suite partielle (15) de manière que

$$c_{n_k} > k$$
,  $k = 1, 2, \ldots$ 

et il suffit de prendre

$$u_n = 0, \ n \neq n_k, \ u_{n_k} = \frac{1}{k^2}, \qquad k = 1, \ 2, \ldots$$

Nous déduisons aussi le

COROLLAIRE 2. Pour que les séries (1) et (4) soient de la même nature quelle que soit la suite non-négative  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ , il faut et il suffit que la suite non-négative  $(e_n)_{n=0}^{\infty}$  vérifie les inégalités  $0 < \lim_{n \to \infty} c_n \le \overline{\lim} c_n < +\infty$ .

8. Reprenons maintenant le cas  $\alpha = 1$ . Nous avons alors le

THÉORÈME 3. Si la suite  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  est non-négative et non-croissante : 1°. Pour que de la divergence de la série (1) résulte celle de la série (4), il faut et il suffit que l'on ait l > 0.

2°. Pour que de la convergence de la série (1) résulte celle de la série (4), il faut et il suffit que l'on ait  $L < +\infty$ .

Conservant les notations précédentes, dans l'énoncé de ce théorème nous avons posé aussi

(16) 
$$l = \underline{\lim} \frac{c_0 + c_1 + \ldots + c_n}{n+1}, \quad L = \overline{\lim} \frac{c_0 + c_1 + \ldots + c_n}{n+1}.$$

La suffisance des conditions résulte du théorème 1. Nous avons donné cette propriété il y a déjà longtemps [5]. Il reste à démontrer que les conditions sont aussi nécessaires.

Supposons d'abord l=0. Nous allons construire une série (1) divergente telle que la série (4) soit convergente.

En vertu de la première formule (12), de toute suite  $(C_{m,n})_{n=0}^{\infty}$  on peut extraire une suite partielle tendant vers zéro. On peut, en particulier, trouver un  $n_1$  tel que  $C_{n_1} < 1$ . On peut ensuite trouver un  $n_2$ , aussi grand que l'on veut, en particulier un  $n_2 > n_1$  tel que  $C_{n_1+1, n_2-n_1-1} < \frac{1}{2}$ . On peut trouver ensuite un  $n_3$  aussi grand que l'on veut, en particulier tel que  $n_3 - 2n_2 + n_1 > 0$  et tel que  $C_{n_2+1, n_3-n_2-1} < \frac{1}{3}$ . En général, pour tout  $k = 2, 3, \ldots$  et les  $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$  étant déterminés, on peut trouver un  $n_k$ , aussi grand que l'on veut, en particulier un  $n_k$  vérifiant l'inégalité

(17) 
$$n_k - 2n_{k-1} + n_{k-2} > 0, \quad k = 3, 4, \dots (n_2 > n_1)$$
 et tel que

(18) 
$$C_{n_{k-1}+1, n_k-n_{k-1}-1} < \frac{1}{k}, \ k = 1, 2, \dots (n_0 = -1).$$

Définissons alors la série (1) telle que

$$u_{n_{k-1}+1} = u_{n_{k-1}+2} = \ldots = u_{n_k} = \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots (n_0 = -1).$$

1025

Cette série est divergente puisque

$$s_{n_k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

mais la série (4) est convergente puisque dans ce cas de la formule (13) il résulte

$$t_{n_k} - t_{n_{k-1}} = C_{n_{k-1}+1, n_k-n_{k-1}-1} (n_k - n_{k-1}) u_{n_k},$$

$$k = 1, 2, \dots (n_0 = -1, t_{-1} = 0)$$

d'où, en tenant compte de (18),

$$t_{n_k} < 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Pour que la démonstration soit complète il faut démontrer que dans cet exemple la suite  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  est bien non-croissante. Or ceci résulte de (17). En effet, on a d'abord  $n_k - n_{k-1} > 0$  et l'inégalité  $u_{n_{k-1}} > u_{n_k}$  revient à

$$\frac{1}{(k-1)(n_{k-1}-n_{k-2})} > \frac{1}{k(n_k-n_{k-2})}$$

ou

$$\begin{aligned} k(n_k - n_{k-1}) - (k-1) & (n_{k-1} - n_{k-2}) = \\ &= k(n_k - 2n_{k-1} + n_{k-2}) + (n_{k-1} - n_{k-2}) > 0, \end{aligned}$$

ce qui est vrai.

Supposons maintenant que  $L=+\infty$ . Nous allons construire une série (1) convergente telle que la série correspondante (4) soit divergente.

Dans ce cas nous pouvons choisir les nombres  $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$  de manière que l'on ait encore (17) et

$$C_{n_{k-1}+1, n_k-n_{k-1}-1} > k, \quad k = 1, 2, \dots (n_0 = -1).$$

Définissons alors la série (1) telle que

$$u_{n_{k-1}+1} = u_{n_{k-1}+2} = \ldots = u_{n_k} = \frac{1}{k^2(n_k - n_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots (n_0 = -1).$$

Dans ce cas la série (1) est convergente puisque

$$s_{n_k} = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

mais la série (4) est divergente puisque

$$t_{n_k} > 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

La suite  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  est encore non-croissante puisque l'inégalité  $u_{n_{k-2}} > u_{n_k}$ revient à

REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE CAUCHY

$$\frac{1}{(k-1)^2 (n_{k-1} - n_{k-2})} > \frac{1}{k^2 (n_k - n_{k-1})}$$

ou

$$k^2(n_k-2n_{k-1}+n_{k-2})+(2k-1)(n_{k-1}-n_{k-2})>0.$$

Du théorème 3 nous déduisons le

COROLLAIRE 3. Pour que les séries (1) et (4) soient de la même nature, quelle que soit la suite non-négative et non-décroissante  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ , il faut et il suffit que la suite non-négative  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$  vérifie les inégalités  $0 < l \le L < +\infty$ , où les nombres l, L sont donnés par (16).

Dans le cas (3) de Schlömilch nous pouvons d'abord remarquer que  $g_n \ge g_{n-1} + 1$ , donc  $g_n \ge g_0 + n$ , pour  $n = 1, 2, \ldots$  Le nombre M est nécessairement  $\ge 1$ . En effet, nous avons  $1 \le g_{n+1} - g_n \le$  $\leq M^n(g_1 - g_0)$  qui, pour 0 < M < 1 ne peut être vérifié pour n assez grand. Si  $g_k \le n < g_{k+1}$ , (k > 0) nous avons

$$\frac{g_{k+1} - g_0}{g_{k+1}} \le C_n \le \frac{g_{k+1} - g_0}{g_k + 1},$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{g_0+k+1} &\leq \frac{g_{k+1}-g_0}{g_{k+1}} \leq C_n \leq \frac{g_k+M(g_k-g_{k-1})-g_0}{g_k+1} = \\ &= \frac{(1+M)g_k}{g_k+1} - \frac{Mg_{k-1}+g_0}{g_k+1} < M+1, \end{aligned}$$

ce qui nous montre que dans ce cas  $l \ge 1$ ,  $L \le M+1$ . D'ailleurs de  $C_{g_{k+1}-1} = \frac{g_{k+1}-g_0}{g_{k+1}}$  et de  $g_{k+1} \to +\infty$  pour  $k \to +\infty$ , il résulte que l=1.

Dans le cas particulier (2), de Cauchy, nous avons  $g_k = 2^k, k = 0, 1, \dots$ et l = 1, L = 2.

Recu le 23 octobre 1967

Institut de Calcul de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie de la Filiale de Cluj

## BIBLIOGRAPHIE

- 1. Andersen, A. F., Studier over Cesaro's summabilitetsmetode, Diss. Köbenhavn, 1921.
- 2. CAUCHY, A. L., Analyse algébrique, p. 135.
- 3. KLUYVER, J. C., Eene uilbreiding van het convergentiekenmerk van Cauchy, Nieuw Archief (2), 8, 373, 374 (1909).
- 4. Knopp, K., Mehrfach monotone Zahlenfolgen, Math. Zeitschrift, 22, 75-85 (1925).
- 5. Popoviciu, T., Curs de calcul diferențial și integral, Ire partie, 1940-41 (Bucarest) (litho-
- 6. Schlömilch, O., Über die gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen. Zeitschrift für Math. u. Physik, 18, 425, 426 (1873).