

non-négative $(c_n)_{n=0}^\infty$ (la suite des multiplicateurs) telles que, quelle que soit la suite $(u_n)_{n=0}^\infty$ non-négative et non-croissante, les séries (1) et

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$$

soient de la même nature.

Nous allons examiner un problème analogue, en soumettant la suite (u_n) à une condition, en général, moins restrictive que la non-croissance.

2. D'après K. Knopp [4] on dit que la suite $(u_n)_{n=0}^\infty$ est α -fois monotone si on a

$$(5) \quad \Delta^\alpha u_n = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{\alpha}{v} u_{n+v} = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v-\alpha-1}{v} u_{n+v} \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

les séries du second membre étant convergentes.

Pour $\alpha = 0$ nous avons $\Delta^0 u_n = u_n$ et nous obtenons les suites non-négatives et pour $\alpha = 1$ nous avons $\Delta^1 u_n = u_n - u_{n+1}$ et nous obtenons les suites non-croissantes. Enfin $\Delta^{-1} u_n$ ($\alpha = -1$) se réduit à la série $\sum_{v=0}^{\infty} u_{n+v}$.

A vrai dire pour $\alpha > 0$ la définition de K. Knopp est un peu plus restrictive puisqu'il considère seulement des suites (u_n) non-négatives, hypothèse que nous admettrons toujours dans la suite. Si $\alpha > 0$, une suite (u_n) dont tous les termes sont égaux à un même nombre quelconque (positif, nul ou négatif) est α -fois monotone puisqu'alors $\Delta^\alpha u_n = 0$, $n = 0, 1, \dots$

Désignons par

$$(6) \quad \Delta_m^\alpha u_n = \sum_{v=0}^m \binom{v-\alpha-1}{v} u_{n+v}, \quad m = 0, 1, \dots$$

les sommes partielles de la série du second membre de (5).

Les différences d'ordre α (5), pour α réel quelconque, ont été introduites par A. F. Andersen [1]. Ce même auteur considère les sommes (6) (avec une notation un peu différente).

3. Dans la suite nous considérons seulement le cas $0 \leq \alpha \leq 1$. Nous avons alors le

LEMME 1. Si $0 \leq \alpha \leq 1$, pour que la suite $(u_n)_{n=0}^\infty$ soit α -fois monotone, il faut et il suffit que

$$(7) \quad \Delta_m^\alpha u_n \geq 0, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

Remarquons que (si $0 \leq \alpha \leq 1$) nous avons $\binom{v-\alpha-1}{v} \leq 0$, $v = 1, 2, \dots$ (l'égalité n'est d'ailleurs pas possible si $0 < \alpha < 1$). Nous pouvons passer à la démonstration du lemme.

La condition est nécessaire. En effet, si $m \geq 0$, la série $\sum_{v=m+1}^{\infty} \binom{v-\alpha-1}{v} u_{n+v}$ est convergente et à termes non-positifs. De $\Delta^\alpha u_n \geq 0$ il résulte donc

$$\Delta_m^\alpha u_n = - \sum_{v=m+1}^{\infty} \binom{v-\alpha-1}{v} u_{n+v} \geq 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

La condition est suffisante. De (7) il résulte que

$$\sum_{v=1}^{\infty} \binom{v-\alpha-1}{v} u_{n+v} \geq -u_n, \quad m = 1, 2, \dots$$

ce qui nous montre que la série $\sum_{v=1}^{\infty} \binom{v-\alpha-1}{v} u_{n+v}$, à termes non-positifs, est convergente. La propriété en résulte.

Le lemme 1 est donc démontré.

4. Dans la suite nous ferons usage d'une importante généralisation de la célèbre formule de transformation d'Abel. Cette formule générale est aussi due à A. F. Andersen [1] et on peut l'écrire sous la forme symétrique

$$\sum_{v=0}^n a_{n-v} b_v = \sum_{v=0}^n \Delta_v^{-\alpha} a_{n-v} \cdot \Delta_{n-v}^\alpha b_v,$$

où α est un nombre quelconque.

Nous écrivons cette formule sous la forme suivante

$$(8) \quad \sum_{v=0}^n a_v b_v = \sum_{v=0}^n \left(\sum_{\mu=0}^v \binom{\alpha+v-\mu-1}{v-\mu} a_\mu \right) \Delta_{n-v}^\alpha b_v$$

Remarquons que $\sum_{v=0}^n \binom{\alpha+n-v-1}{n-v} = \binom{\alpha+n}{n}$ et posons

$$(9) \quad C_n = \frac{1}{\binom{\alpha+n}{n}} \sum_{v=0}^n \binom{\alpha+n-v-1}{n-v} c_v, \quad n = 0, 1, \dots$$

et

$$(10) \quad C_{m,n} = \frac{1}{\binom{\alpha+n}{n}} \sum_{v=0}^n \binom{\alpha+n-v-1}{n-v} c_{m+v}, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

qui ont un sens si $0 \leq \alpha \leq 1$ (même pour d'autres valeurs de α , par exemple pour $\alpha > -1$).

Nous avons $C_{0,n} = C_n$, $n = 0, 1, \dots$

Pour $\alpha = 0$, les formules (9), (10) reviennent à $C_n = c_n$, $C_{m,n} = c_{m+n}$ respectivement.

Nous avons la formule

$$(11) \quad C_{m+1, n} = \frac{(\alpha + n + 1) C_{m, n+1} - \alpha c_m}{n + 1}.$$

5. De la formule (11) il résulte que $\lim_n C_{m, n}$, $\overline{\lim}_n C_{m, n}$ sont indépendants de m . En particulier donc nous avons

$$(12) \quad \lim_n C_n = \lim_n C_{m, n}, \quad \overline{\lim}_n C_n = \overline{\lim}_n C_{m, n}$$

pour toute valeur de l'indice m .

Nous en déduisons le

LEMME 2. 1°. Pour que l'on ait $\lim C_n > 0$ il faut et il suffit qu'il existe un indice m tel que $\inf_n C_{m, n} > 0$.

2°. Pour que l'on ait $\lim C_n < +\infty$ il faut et il suffit qu'il existe un indice m tel que $\sup_n C_{m, n} < +\infty$.

Démontrons la première partie du lemme. Si $\lim C_n > 0$, la suite $(c_n)_{n=0}^\infty$ doit contenir une infinité de termes positifs. Si m est un indice tel que $c_m > 0$, on a $C_{m, n} > 0$, $n = 0, 1, \dots$. Nous avons alors $\inf_n C_{m, n} > 0$, car autrement (si donc $\inf_n C_{m, n} = 0$) il en résulterait $\lim_n C_{m, n} = 0$, ce qui contredit la première formule (12). Réciproquement, de $\inf_n C_{m, n} > 0$ il résulte $\lim_n C_{m, n} > 0$, donc $\lim C_n > 0$, d'après la formule (12).

Passons à la démonstration (plus simple) de la seconde partie du lemme 2.

Ceci résulte du fait qu'une suite est bornée supérieurement si et seulement si sa limite supérieure est $< +\infty$. D'ailleurs, $\lim C_n$ et $\lim_n C_{m, n}$, quel que soit m , sont en même temps finis ou infinis.

6. Désignons maintenant par s_n , $n = 0, 1, \dots$, les sommes partielles de la série (1) et par t_n , $n = 0, 1, \dots$, les sommes partielles de la série (4).

En appliquant la formule de transformation (8), nous en déduisons ($t_{-1} = 0$)

$$(13) \quad t_{m+n} - t_{m-1} = \sum_{v=0}^n c_{m+v} u_{m+v} = \sum_{v=0}^n C_{m, v} \binom{\alpha + v}{v} \Delta_{n-v}^\alpha u_{m+v}, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

et, en particulier (en prenant $c_n = 1$, $n = 0, 1, \dots$, et $s_{-1} = 0$)

$$(14) \quad s_{m+n} - s_{m-1} = \sum_{v=0}^n \binom{\alpha + v}{v} \Delta_{n-v}^\alpha u_{m+v}, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

Nous allons maintenant démontrer le

THÉORÈME 1. Si $0 \leq \alpha \leq 1$ et si la suite $(u_n)_{n=0}^\infty$ est non-négative et α -fois monotone :

1°. Lorsque la suite non-négative $(c_n)_{n=0}^\infty$ vérifie l'inégalité $\lim C_n > 0$, de la divergence de la série (1) résulte celle de la série (4).

2°. Lorsque la suite non-négative $(c_n)_{n=0}^\infty$ vérifie l'inégalité $\lim C_n < +\infty$, de la convergence de la série (1) résulte celle de la série (4).

Si la suite $(u_n)_{n=0}^\infty$ a seulement un nombre fini de termes différents de zéro, les séries (1) et (4) sont toujours toutes les deux convergentes et le théorème 1 en résulte.

Dans le cas contraire (si donc une infinité de u_n sont différents de zéro), supposons $\lim C_n > 0$. D'après le lemme 2, il existe un indice m tel que $\inf_n C_{m, n} > 0$. Il existe alors un N tel que $s_{m+n} - s_{m-1} > 0$ pour $n > N$. De (13) et (14) il résulte que

$$0 < \inf_p C_{m, p} \leq \min(C_{m, 0}, C_{m, 1}, \dots, C_{m, n}) \leq \frac{t_{m+n} - t_{m-1}}{s_{m+n} - s_{m-1}}, \quad \text{pour } n > N$$

d'où résulte la première partie du théorème 1, en vertu des propriétés des séries à termes non-négatifs et de la première formule de la moyenne (relative aux moyennes arithmétiques pondérées).

La seconde partie du théorème résulte de la même manière de la formule

$$\frac{t_{m+n} - t_{m-1}}{s_{m+n} - s_{m-1}} \leq \max(C_{m, 0}, C_{m, 1}, \dots, C_{m, n}) \leq \sup_p C_{m, p} < +\infty, \quad \text{pour } n > N$$

en supposant que $\sup_n C_{m, n} < +\infty$, le nombre N étant toujours déterminé tel que $s_{m+n} - s_{m-1} > 0$ pour $n > N$.

Du théorème 1 résulte le

COROLLAIRE 1. Si $0 \leq \alpha \leq 1$ et si la suite $(c_n)_{n=0}^\infty$ vérifie les inégalités

$$0 < \lim C_n \leq \overline{\lim} C_n < +\infty,$$

où les C_n sont donnés par les formules (9), les séries (1) et (4) sont de la même nature.

Remarques. La généralité plus ou moins grande des conditions du théorème 1 résulte, d'une part, du fait que d'après K. Knopp [4] si $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ toute suite α -fois monotone (et tendant vers 0) est aussi β -fois monotone et, d'autre part, si pour mettre en évidence l'ordre α , nous désignons par $C_n^{(\alpha)}$ les expressions (9), nous avons

$$C_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\binom{\alpha + n}{n}} \sum_{v=0}^n \binom{\alpha - \beta + n - v - 1}{n - v} \binom{\beta + v}{v} C_v^{(\beta)}.$$

On a

$$\sum_{v=0}^n \binom{\alpha - \beta + n - v - 1}{n - v} \binom{\beta + v}{v} = \binom{\alpha + n}{n}$$

tous les termes de la somme du premier membre étant ≥ 0 . Remarquons aussi que, pour tout v donné, on a

$$\frac{\binom{\alpha - \beta + n - v - 1}{n - v} \binom{\beta + v}{v}}{\binom{\alpha + n}{n}} = \frac{\binom{\beta + v}{v} \binom{n}{v}}{\binom{\alpha + n}{n}} \prod_{\gamma=0}^{n-v-1} \left(1 - \frac{\beta + 1}{\alpha + \gamma + 1}\right) \rightarrow 0$$

pour $n \rightarrow 0$. Il résulte alors de la théorie de la sommabilité par séries divergentes que

$$\lim C_n^{(\beta)} \leq \lim C_n^{(\alpha)} \leq \overline{\lim} C_n^{(\alpha)} \leq \overline{\lim} C_n^{(\beta)}.$$

Pour le cas $\alpha = 1$ nous allons donner un résultat plus complet.

7. Pour être complet nous allons examiner d'abord le cas $\alpha = 0$, qui est d'ailleurs bien connu dans la théorie des séries. Nous avons le

THÉORÈME 2. Si la suite $(u_n)_{n=0}^\infty$ est non-négative :

1°. Pour que de la divergence de la série (1) résulte celle de la série (4), il faut et il suffit que l'on ait $\lim c_n > 0$.

2°. Pour que de la convergence de la série (1) résulte celle de la série (4), il faut et il suffit que l'on ait $\overline{\lim} c_n < +\infty$.

On suppose, bien entendu, que la suite $(c_n)_{n=0}^\infty$ est non-négative.

La suffisance des conditions résulte du théorème 1. Il reste à démontrer que ces conditions sont aussi nécessaires.

Nous montrerons d'abord que si $\lim c_n = 0$, on peut trouver une série (1) divergente telle que la série (4) soit convergente. En effet, dans ce cas, on peut trouver une suite partielle (infinie)

$$(15) \quad c_{n_1}, c_{n_2}, \dots, c_{n_k}, \dots$$

de (c_n) telle que l'on ait

$$c_{n_k} < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Il suffit alors de considérer la série (1), où

$$u_n = 0, \quad n \neq n_k, \quad u_{n_k} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Montrons maintenant que si $\overline{\lim} c_n = +\infty$, on peut trouver une série (1) convergente telle que la série correspondante (4) soit divergente. Dans ce cas on peut trouver la suite partielle (15) de manière que

$$c_{n_k} > k, \quad k = 1, 2, \dots$$

et il suffit de prendre

$$u_n = 0, \quad n \neq n_k, \quad u_{n_k} = \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Nous déduisons aussi le

COROLLAIRE 2. Pour que les séries (1) et (4) soient de la même nature quelle que soit la suite non-négative $(u_n)_{n=0}^\infty$, il faut et il suffit que la suite non-négative $(c_n)_{n=0}^\infty$ vérifie les inégalités $0 < \lim c_n \leq \overline{\lim} c_n < +\infty$.

8. Reprenons maintenant le cas $\alpha = 1$. Nous avons alors le

THÉORÈME 3. Si la suite $(u_n)_{n=0}^\infty$ est non-négative et non-croissante :

1°. Pour que de la divergence de la série (1) résulte celle de la série (4), il faut et il suffit que l'on ait $l > 0$.

2°. Pour que de la convergence de la série (1) résulte celle de la série (4), il faut et il suffit que l'on ait $L < +\infty$.

Conservant les notations précédentes, dans l'énoncé de ce théorème nous avons posé aussi

$$(16) \quad l = \lim \frac{c_0 + c_1 + \dots + c_n}{n+1}, \quad L = \overline{\lim} \frac{c_0 + c_1 + \dots + c_n}{n+1}.$$

La suffisance des conditions résulte du théorème 1. Nous avons donné cette propriété il y a déjà longtemps [5]. Il reste à démontrer que les conditions sont aussi nécessaires.

Supposons d'abord $l = 0$. Nous allons construire une série (1) divergente telle que la série (4) soit convergente.

En vertu de la première formule (12), de toute suite $(C_{m,n})_{n=0}^\infty$ on peut extraire une suite partielle tendant vers zéro. On peut, en particulier, trouver un n_1 tel que $C_{n_1} < 1$. On peut ensuite trouver un n_2 , aussi grand que l'on veut, en particulier un $n_2 > n_1$ tel que $C_{n_1+1, n_2-n_1-1} < \frac{1}{2}$.

On peut trouver ensuite un n_3 aussi grand que l'on veut, en particulier tel que $n_3 - 2n_2 + n_1 > 0$ et tel que $C_{n_2+1, n_3-n_2-1} < \frac{1}{3}$. En général, pour tout $k = 2, 3, \dots$ et les $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ étant déterminés, on peut trouver un n_k , aussi grand que l'on veut, en particulier un n_k vérifiant l'inégalité

$$(17) \quad n_k - 2n_{k-1} + n_{k-2} > 0, \quad k = 3, 4, \dots (n_2 > n_1)$$

et tel que

$$(18) \quad C_{n_{k-1}+1, n_k-n_{k-1}-1} < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots (n_0 = -1).$$

Définissons alors la série (1) telle que

$$u_{n_{k-1}+1} = u_{n_{k-1}+2} = \dots = u_{n_k} = \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots (n_0 = -1).$$

Cette série est divergente puisque

$$s_{n_k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

mais la série (4) est convergente puisque dans ce cas de la formule (13) il résulte

$$t_{n_k} - t_{n_{k-1}} = C_{n_{k-1}+1, n_k - n_{k-1}-1} (n_k - n_{k-1}) u_{n_k}, \\ k = 1, 2, \dots (n_0 = -1, t_{-1} = 0)$$

d'où, en tenant compte de (18),

$$t_{n_k} < 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Pour que la démonstration soit complète il faut démontrer que dans cet exemple la suite $(u_n)_{n=0}^\infty$ est bien non-croissante. Or ceci résulte de (17). En effet, on a d'abord $n_k - n_{k-1} > 0$ et l'inégalité $u_{n_{k-1}} > u_{n_k}$ revient à

$$\frac{1}{(k-1)(n_{k-1} - n_{k-2})} > \frac{1}{k(n_k - n_{k-2})}$$

ou

$$k(n_k - n_{k-1}) - (k-1)(n_{k-1} - n_{k-2}) = \\ = k(n_k - 2n_{k-1} + n_{k-2}) + (n_{k-1} - n_{k-2}) > 0,$$

ce qui est vrai.

Supposons maintenant que $L = +\infty$. Nous allons construire une série (1) convergente telle que la série correspondante (4) soit divergente.

Dans ce cas nous pouvons choisir les nombres $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ de manière que l'on ait encore (17) et

$$C_{n_{k-1}+1, n_k - n_{k-1}-1} > k, \quad k = 1, 2, \dots (n_0 = -1).$$

Définissons alors la série (1) telle que

$$u_{n_{k-1}+1} = u_{n_{k-1}+2} = \dots = u_{n_k} = \frac{1}{k^2(n_k - n_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots (n_0 = -1).$$

Dans ce cas la série (1) est convergente puisque

$$s_{n_k} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

mais la série (4) est divergente puisque

$$t_{n_k} > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

La suite $(u_n)_{n=0}^\infty$ est encore non-croissante puisque l'inégalité $u_{n_{k-2}} > u_{n_k}$ revient à

$$\frac{1}{(k-1)^2(n_{k-1} - n_{k-2})} > \frac{1}{k^2(n_k - n_{k-1})}$$

ou

$$k^2(n_k - 2n_{k-1} + n_{k-2}) + (2k-1)(n_{k-1} - n_{k-2}) > 0.$$

Du théorème 3 nous déduisons le

COROLLAIRE 3. Pour que les séries (1) et (4) soient de la même nature, quelle que soit la suite non-négative et non-décroissante $(u_n)_{n=0}^\infty$, il faut et il suffit que la suite non-négative $(c_n)_{n=0}^\infty$ vérifie les inégalités $0 < l \leq L < +\infty$, où les nombres l, L sont donnés par (16).

Dans le cas (3) de Schlömilch nous pouvons d'abord remarquer que $g_n \geq g_{n-1} + 1$, donc $g_n \geq g_0 + n$, pour $n = 1, 2, \dots$. Le nombre M est nécessairement ≥ 1 . En effet, nous avons $1 \leq g_{n+1} - g_n \leq M(g_1 - g_0)$ qui, pour $0 < M < 1$ ne peut être vérifié pour n assez grand. Si $g_k \leq n < g_{k+1}$, ($k > 0$) nous avons

$$\frac{g_{k+1} - g_0}{g_{k+1}} \leq C_n \leq \frac{g_{k+1} - g_0}{g_k + 1},$$

d'où il résulte

$$\frac{k+1}{g_0 + k + 1} \leq \frac{g_{k+1} - g_0}{g_{k+1}} \leq C_n \leq \frac{g_k + M(g_k - g_{k-1}) - g_0}{g_k + 1} = \\ = \frac{(1+M)g_k}{g_k + 1} - \frac{Mg_{k-1} + g_0}{g_k + 1} < M + 1,$$

ce qui nous montre que dans ce cas $l \geq 1$, $L \leq M + 1$. D'ailleurs de

$C_{g_{k+1}-1} = \frac{g_{k+1} - g_0}{g_{k+1}}$ et de $g_{k+1} \rightarrow +\infty$ pour $k \rightarrow +\infty$, il résulte que $l = 1$.

Dans le cas particulier (2), de Cauchy, nous avons $g_k = 2^k$, $k = 0, 1, \dots$ et $l = 1$, $L = 2$.

Reçu le 23 octobre 1967

Institut de Calcul
de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie
de la Filiale de Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. ANDERSEN, A. F., *Studier over Cesaro's summabilitetsmetode*, Diss. København, 1921.
2. CAUCHY, A. L., *Analyse algébrique*, p. 135.
3. KLUYVER, J. C., *Eene uitbreiding van het convergentiekenmerk van Cauchy*, Nieuw Archief (2), 8, 373, 374 (1909).
4. KNOPP, K., *Mehrfach monotone Zahlenfolgen*, Math. Zeitschrift, 22, 75-85 (1925).
5. POPOVICIU, T., *Curs de calcul diferential și integral*, I^{re} partie, 1940-41 (Bucarest) (lithographié).
6. SCHLÖMILCH, O., *Über die gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen*, Zeitschrift für Math. u. Physik, 18, 425, 426 (1873).