ANALELE ŞTIINŢIFICE

ALE

UNIVERSITĂȚII „AL. I. CUZA"

DIN IAȘI

(SERIE NOUĂ)

SECȚIUNEA I

a. Matematică

TOMUL XIV, ANUL 1968

FASC. 1

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII „AL. I. CUZA" — IAŞI

Tom. XIV, s. I a, Fasc. 1 1968

SUMAR

SUR LA CONSERVATION DE L'ALLURE DE CONVEXITÉ DES FONCTIONS PAR INTERPOLATION

PAR

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

Communication présentée au Congrès International des Mathématiciens, Moscou, 16—26 août 1966

1. Considérons un opérateur $F[f|x]$ qui transforme la fonction f, réelle d'une variable réelle définie sur l'ensemble E de l'axe réel, en une fonction de x réelle définie sur un ensemble I de l'axe réel.

Il est inutile de préciser dès maintenant la nature de l'opérateur $F[f|x]$, son ensemble de définition et les structures des ensembles E, I. Dans la suite E sera en général un intervalle et l'opérateur $F[f|x]$ un opérateur linéaire (additif et homogène) particulier. La fonction $F[f|x]$ de x sera toujours un polynôme, donc I peut être un ensemble quelconque de l'axe réel.

Définition. *Nous disons que l'opérateur $F[f|x]$ conserve (sur I) la non-concavité d'ordre n (de la fonction f) si la fonction $F[f|x]$ de x est non-concave d'ordre n (sur I) pour toute fonction f non-concave d'ordre n (sur E).*

Une définition analogue peut être donnée pour la conservation de la convexité, de la non-convexité et de la concavité d'ordre n de la fonction f par l'opérateur $F[f|x]$. Remarquons que si l'opérateur $F[f|x]$ conserve la non-concavité (convexité) d'ordre n, l'opérateur $-F[f|x]$ conserve la non-convexité (concavité) d'ordre n de f sur le même ensemble I et réciproquement. Il en résulte que si un opérateur linéaire $F[f|x]$ conserve la non-concavité (convexité) d'ordre n, il conserve aussi la non-convexité (concavité) d'ordre n de f et réciproquement sur le même ensemble I.

2. Nous supposons qu'on connaît les définitions et les propriétés des fonctions non-concaves, convexes, non-convexes et concaves d'ordre n. Ces définitions s'obtiennent par la conservation du signe des différences divisées d'ordre $n+1$ de la fonction. Pour ces propriétés on peut voir, par exemple, mes travaux antérieurs sur les fonctions convexes d'ordre supérieur et dont la liste est inutile d'être reproduite ici.

Nous désignons par $[x_1, x_2, \dots, x_m; f]$ la différence divisée d'ordre $m-1$ et par $L(x_1, x_2, \dots, x_m; f\,|\,x)$ le polynôme de Lagrange-Hermite de la fonction f sur les noeuds x_α, $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Les noeuds x_α ne sont pas nécessairement distincts, mais la différence divisée et le polynôme de Lagrange-Hermite ont des définitions bien connues contenant linéairement, en dehors des valeurs de la fonction f sur les noeuds, aussi les valeurs d'un certain nombre des dérivées successives de f sur les noeuds qui ont un ordre de multiplicité plus grand que 1.

3. Soient $k_1, k_2, \dots, k_p$ des nombres naturels $(p \geqq 1)$, de somme égale à m et soit $k = \max(k_1, k_2, \dots, k_p)$. Considérons le polynôme de Lagrange-Hermite $L(x) = L(x_1, x_2, \dots, x_m; f\,|\,x)$ sur les m noeuds $x_1, x_2, \dots, x_m$ dont k_α coïncident avec y_α, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, les $y_1, y_2, \dots, y_p$ étant p points distincts de l'axe réel.

On sait que le polynôme $L(x)$ est complètement caractérisé par le fait qu'il est de degré $m-1$ et qu'il vérifie les égalités

$$L^{(\gamma)}(y_\alpha) = f^{(\gamma)}(y_\alpha), \quad \gamma = 0, 1, \dots, k_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p \tag{1}$$

où les accents signifient des dérivations successives $(f^{(0)}(x) = f(x))$.

Nous avons

$$L(x_1, x_2, \dots, x_m; f\,|\,x) = \sum_{\beta=0}^{k-1} H_\beta[f\,|\,x], \tag{2}$$

où

$$H_\beta[f\,|\,x] = \sum\nolimits^{(\beta)} f^{(\beta)}(y_\alpha)\, h_{\beta,\alpha}(x), \quad \beta = 0, 1, \dots, k-1, \tag{3}$$

la sommation $\sum^{(\beta)}$ étant étendue à toutes les valeurs de α pour lesquelles $k_\alpha \geqq \beta + 1$. Le polynôme $h_{\beta,\alpha}(x)$ est de degré $m-1$, est égal à $L(x_1, x_2, \dots, x_m; f\,|\,x)$ pour une fonction f convenablement choisie et vérifie les égalités

$$\begin{cases} h^{(\gamma)}_{\beta,\alpha}(y_\delta) = 0 & \begin{cases} \gamma = 0, 1, \dots, k_\delta - 1, & \delta = 1, 2, \dots, \alpha - 1, \ \alpha + 1, \dots, p \\ \gamma = 0, 1, \dots, \beta - 1, & \beta + 1, \dots, h_\alpha - 1, \quad \delta = \alpha \end{cases} \\ h^{(\beta)}_{\beta,\alpha}(y_\alpha) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

4. Posons maintenant

$$F_\gamma[f\,|\,x] = \sum_{\beta=0}^{\gamma} H_\beta[f\,|\,x], \quad \gamma = 0, 1, \dots, k-1. \tag{5}$$

Alors $F_\gamma[f\,|\,x]$ est un opérateur linéaire qu'on peut supposer, et que nous supposons, être défini sur l'ensemble des fonctions ayant une dérivée d'ordre γ sur un intervalle E contenant les points y_α, $\alpha = 1, 2, \dots, p$.

Nous avons, en particulier, $F_{k-1}[f\,|\,x] = L(x_1, x_2, \dots, x_m; f\,|\,x)$.

Lorsque tous les noeuds sont doubles, donc si $k_1 = k_2 = \dots = k_p = 2\ (m = 2p)$, $F_0[f\,|\,x]$ est l'opérateur bien connu de Fejér [1].

Le problème de la conservation de la non-concavité d'un ordre donné n $(\geqq -1)$ par l'opérateur (2) ou, en général par l'opérateur (5), présente un certain intérêt. Nous avons d'abord les importants résultats de L. Fejér [1] sur la conservation du signe $(n = -1)$ par l'opérateur $F_0[f\,|\,x]$ dans le cas des noeuds tous doubles. Nous avons donné, entre autres, certains résultats sur la conservation du signe $(n = -1)$ ou de la monotonie $(n = 0)$ par le polynôme (2) dans le cas des noeuds tous simples et pour l'opérateur de Fejér [3, 4, 5].

5. D'après (4), le polynôme $h_{\beta,\alpha}(x)$ est toujours divisible par le polynôme $\prod_{\alpha=1}^{p} (x - y_\alpha)^{\min(\beta, k_\alpha)}$. Il en est ainsi aussi pour la somme $\sum^{(\beta)} h_{\beta,\alpha}(x)$. Cette somme est de degré effectif au moins égal à $\sum_{\alpha=1}^{p} \min(\beta, k_\alpha)$ puisque sa dérivée d'ordre β, pour $x = y_\delta$, où $y_\delta \geqq \beta + 1$, est égale à $\sum^{(\beta)} h^{(\beta)}_{\beta,\alpha}(y_\delta) = h^{(\beta)}_{\beta,\delta}(y_\delta) = 1$, par suite des égalités (4).

Nous en déduisons le

Théorème 1. *Si $1 \leqq \beta \leqq k-1$, $n \geqq \beta$ et si*

$$n < \sum_{\alpha=1}^{p} \min(\beta, k_\alpha), \tag{6}$$

le polynôme $F_{\beta-1}[f\,|\,x]$ ne conserve la non-concavité d'ordre n sur aucun intervalle de longueur non-nulle I.

Supposons, en effet, le contraire. La fonction x^β est à la fois non-concave et non-convexe d'ordre n (sur I), donc $F_{\beta-1}[x^\beta\,|\,x]$ se réduit à un polynôme de degré n. Mais si dans (2) nous posons $f(x) = x^\beta$, nous avons d'après (3), $x^\beta = F_{\beta-1}[x^\beta\,|\,x] + \beta!\, \Sigma^{(\beta)} h_{\beta,\alpha}(x)$, ce qui d'après (6) est impossible.

Lorsque les ordres de multiplicité $k_1, k_2, \dots, k_p$ des noeuds sont tous pairs et lorsque $\beta = k-1$, on peut obtenir un résultat plus précis par le

Théorème 2. *Si les ordres de multiplicité $k_1, k_2, \dots, k_p$ des noeuds sont tous pairs et si*

$$k = \max(k_1, k_2, \dots, k_p) \leqq n + 1 < \sum_{\alpha=1}^{p} k_\alpha = m,$$

le polynôme $F_{k-2}[f\,|\,x]$ ne conserve la non-concavité d'ordre n sur aucun intervalle de longueur non-nulle I.

La démonstration se fait comme pour le théorème 1, en remarquant que

$$h_{k-1,\alpha}(x) = \frac{(x-y_\alpha)^{k_\alpha - 1} \prod\limits_{\gamma=1}^{p}{}^{(\alpha)} (x-y_\gamma)^{k_\gamma}}{(k_\alpha - 1)! \prod\limits_{\gamma=1}^{p}{}^{(\alpha)} (y_\alpha - y_\gamma)^{k_\gamma}}$$

où dans le produit $\prod\limits_{\gamma=1}^{p}{}^{(\alpha)}$ la valeur α de γ est exceptée. La somme $\Sigma^{(k-1)} h_{k-1,\alpha}(x)$ est un polynôme de degré effectif $m-1$ dont le premier coefficient (celui de x^{m-1}) est

$$\sum{}^{(k-1)} \frac{1}{(k_\alpha - 1)! \prod\limits_{\gamma=1}^{p}{}^{(\alpha)} (y_\alpha - y_\gamma)^{k_\gamma}} > 0.$$

6. Pour les polynômes (5) il suffit toujours d'examiner la conservation de la non-concavité d'ordre n, pour n suffisamment petit. En effet, si $n \geqq m-1$, le polynôme d'interpolation généralisée (5) conserve trivialement la non-concavité d'ordre n de la fonction sur tout l'axe réel, puisque tout polynôme de degré n est non-concave d'ordre n partout.

7. Si les noeuds sont tous confondus, donc si $p = 1$, $k = m$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = y_1 = c$, on peut prendre pour E un intervalle quelconque de longueur non-nulle contenant le point c. Nous avons alors

$$(7) \qquad F_{k-1}[f \mid x] = L(x_1, x_2, \ldots, x_m; f \mid x) = \sum_{\beta=0}^{m-1} \frac{(x-c)^\beta}{\beta!} f^{(\beta)}(c)$$

et c'est le polynôme de Taylor de degré $m-1$ de la fonction f sur le point c.

Nous avons le

Théorème 3. *Si $m \geqq 2$, $-1 \leqq n \leqq m-3$, le polynôme de Taylor (7) ne conserve la non-concavité d'ordre n sur aucun intervalle de longueur non-nulle I de l'axe réel.*

Soit d'abord $n = -1$. Il s'agit alors de démontrer la non-conservation du signe par le polynôme (7).

Soit z un point *intérieur* de I et différent de c. La fonction (polynôme)

$$(8) \qquad \varphi(x) = 1 - \frac{x-c}{z-c} + \left(\frac{x-c}{z-c}\right)^{2m} = 1 + \left|\frac{x-c}{z-c}\right| \left(\left|\frac{x-c}{z-c}\right|^{2m-1} - \operatorname{sgn} \frac{x-c}{z-c} \right)$$

est positive sur l'axe réel, donc sur E. Si nous posons $f(x) = \varphi(x)$, le polynôme de Taylor (7) devient $F_{k-1}[\varphi \mid x] = 1 - \dfrac{x-c}{z-c}$. C'est un poly-

nôme de degré effectif 1 qui s'annule sur z et qui prend donc aussi des valeurs négatives sur tout voisinage de z, donc aussi sur I.

Le théorème est ainsi démontré pour $n = -1$.

Pour $n > -1$ la démonstration est analogue. Il suffit de prendre pour $f(x)$ une fonction dont la dérivée d'ordre $n+1$ soit égale à la fonction (8) et de remarquer que la dérivée d'ordre $n+1$ d'une fonction non-concave d'ordre n doit être non-négative.

Si $n > m-3$ le polynôme (7) conserve la non-concavité d'ordre n sur tout l'axe réel.

8. Les théorèmes 1, 2, 3 sont plutôt des théorèmes de *non conservation* de la non-concavité d'un certain ordre n. Nous allons donner aussi, par quelques exemples, des propriétés de *conservation* de la non-concavité pour tout ordre $\geqq -1$.

Considérons d'abord le cas où nous avons seulement deux noeuds distincts, l'un étant simple. Soit donc $p = 2$, $k_1 = k = m-1$, $k_2 = 1$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{m-1} = y_1 = a$, $x_m = y_2 = b$ et supposons $a < b$, pour fixer les idées.

Dans ce cas nous avons

$$(9) \qquad F_\gamma[f \mid x] = \frac{(x-a)^{m-1}}{(b-a)^{m-1}} f(b) + \sum_{\alpha=0}^{\gamma} \frac{1}{\alpha!} \left[(x-a)^\alpha - \frac{(x-a)^{m-1}}{(b-a)^{m-\alpha-1}} \right] f^{(\alpha)}(a)$$

$$\gamma = 0, 1, \ldots, m-2$$

et nous pouvons énoncer le

Théorème 4. *Si $m \geqq 2$, $0 \leqq \gamma \leqq m-2$ et si $\mu_\gamma = 1 \Big/ \binom{m-1}{\gamma}^{\frac{1}{m-\gamma-1}}$ le polynôme d'interpolation généralisée (9) conserve la non-concavité d'ordre $\gamma - 1$ sur l'intervalle $[a, a + \mu_\gamma (b-a)]$ si $m - \gamma$ est pair et sur l'intervalle $[a - \mu_\gamma (b-a), a + \mu_\gamma (b-a)]$ si $m-\gamma$ est impair.*

De même, le polynôme d'interpolation généralisée (9) conserve la non-concavité d'ordre γ sur l'intervalle $[a, +\infty)$ si $m-\gamma$ est impair et sur tout l'axe réel si $m-\gamma$ est pair.

La démonstration résulte immédiatement des formules

$$\frac{d^\gamma F_\gamma[f \mid x]}{dx^\gamma} = (m-1)(m-2)\ldots(m-\gamma) \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{m-\gamma-1} [b, \underbrace{a, a, \ldots, a}_{\gamma}; f] +$$

$$+ \left[1 - \binom{m-1}{\gamma} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{m-\gamma-1} \right] f^{(\gamma)}(a)$$

$$\frac{d^{\gamma+1} F_\gamma[f \mid x]}{dx^{\gamma+1}} = (m-1)(m-2)\ldots(m-\gamma-1) \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{m-\gamma-2} [b, \underbrace{a, a, \ldots, a}_{\gamma+1}; f]$$

Si $b<a$ nous avons une propriété analogue qui s'obtient de la même manière. Dans ce cas il suffit de remplacer dans l'énoncé du théorème les intervalles $[a, a+\mu_\gamma(b-a)]$, $[a-\mu_\gamma(b-a), a+\mu_\gamma(b-a)]$ et $[a, +\infty)$ respectivement par $[a-\mu_\gamma(a-b), a]$, $[a-\mu_\gamma(a-b), a+\mu_\gamma(a-b)]$ et $(-\infty, a]$.

9. Supposons encore que nous ayons seulement deux noeuds distincts, dont k_1 coïncident avec a et k_2 avec b, où $a<b$. Nous avons $k_1+k_2=m$ et nous pouvons supposer $k_1 \geqq 2$, $k_2 \geqq 2$. Nous pouvons alors obtenir les polynômes $h_{\beta,\alpha}(x)$ sous la forme suivante

$$h_{\beta,1}(x)=\frac{(m-\beta-1)!\,(x-a)^\beta}{\beta!\,(b-a)^{m-\beta-1}(k_1-\beta-1)!\,(k_2-1)!}\cdot$$

$$\cdot\int_x^b (t-a)^{k_1-\beta-1}(b-t)^{k_2-1}\,dt,\quad \beta=0,1,\ldots,k_1-1$$

$$h_{\beta,2}(x)=\frac{(-1)^\beta(m-\beta-1)!\,(b-x)^\beta}{\beta!\,(b-a)^{m-\beta-1}(k_1-1)!\,(k_2-\beta-1)!}\cdot$$

$$\cdot\int_a^x (t-a)^{k_1-1}(b-t)^{k_2-\beta-1}\,dt,\quad \beta=0,1,\ldots,k_2-1.$$

Considérons encore les polynômes d'interpolation généralisées (5) où nous avons (3) et $k=\max(k_1, k_2)$.

On voit tout de suite que l'opérateur $F_0[f\,|\,x]$ *conserve le signe* et la formule

$$\frac{dF_0[f\,|\,x]}{dx}=\frac{(m-1)!\,(x-a)^{k_1-1}(b-x)^{k_2-1}}{(k_1-1)!\,(k_2-1)!\,(b-a)^{m-2}}[a, b; f]$$

nous montre qu'il *conserve aussi la monotonie* de la fonction sur l'intervalle $[a, b]$.

Si nous faisons les calculs nous trouvons aussi

$$\frac{d^2F_1[f\,|\,x]}{dx^2}=\frac{(m-2)!\,(x-a)^{k_1-2}(b-x)^{k_2-2}}{(k_1-1)!\,(k_2-1)!\,(b-a)^{m-2}}\cdot$$

$$\cdot\{(k_1-1)[(k_2-1)a+k_1b-(m-1)x][a, a, b; f]+$$
$$+(k_2-1)[(m-1)x-k_2a-(k_1-1)b][a, b, b; f]\}$$

et cette formule nous montre que l'opérateur $F_1[f\,|\,x]$ *conserve la non-concavité habituelle* (d'ordre 1) sur l'intervalle

$$\left[\frac{k_2a+(k_1-1)b}{m-1}, \frac{(k_2-1)a+k_1b}{m-1}\right].$$

Cette propriété est à rapprocher à celle qui exprime que l'opérateur $F_{k-1}[f\,|\,x]=L(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k_1}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{k_2}; f\,|\,x)$ conserve la non-concavité d'ordre $m-3$ sur l'intervalle

$$\left[\frac{k_1a+(k_2-1)b}{m-1}, \frac{(k_1-1)a+k_2b}{m-1}\right]$$

et qui résulte comme cas limite d'une propriété déjà établie pour le polynôme de Lagrange (sur des noeuds distincts) [4].

10. Les propriétés de non conservation et de conservation de la non-concavité d'ordre n des opérateurs (5) sont à rapprocher de la propriété très remarquable du polynôme de S. N. Bernstein $\sum_{\alpha=0}^{m}\binom{m}{\alpha}f\left(\frac{\alpha}{m}\right)x^\alpha(1-x)^{m-\alpha}$ de conserver sur l'intervalle $[0,1]$, toute propriété de convexité de la fonction f définie sur cet intervalle [2].

Des considérations générales sur la conservation de l'allure de convexité par des polynômes d'interpolation généralisée de la forme $\sum_{\alpha=0}^{m} f(x_\alpha)P_\alpha(x)$ ont été faites dans un de mes travaux antérieurs [4].

BIBLIOGRAPHIE

1. Fejér, Leopold — *Über Weierstrassche Approximation besonders durch Hermitesche Interpolation*. Math. Annalen, 102, (1930), 707—725.

2. Popoviciu T. — *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. Mathematica, 10, (1934), 49—54.

3. Popoviciu T. — *Remarques sur la conservation du signe et de la monotonie par certains polynômes d'interpolation d'une fonction d'une variable*. Annales Univ. Sci. Budapestiensis, III—IV, (1960/61), 241—246.

4. Popoviciu T. — *Sur la conservation de l'allure de convexité d'une fonction par ses polynômes d'interpolation*. Mathematica, 3 (26), (1961), 311—329.

5. Popoviciu T. — *Sur la conservation, par le polynôme d'interpolation de L. Fejér, du signe ou de la monotonie de la fonction*. An. şt. Univ. Iaşi, VIII, (1962), 65—84.

ASUPRA CONSERVĂRII ALURII DE CONVEXITATE A FUNCȚIILOR PRIN INTERPOLARE

Rezumat

Continuînd cercetările asupra conservării alurii de convexitate [3, 4, 5], se consideră polinomul lui Lagrange-Hermite $L(x_1, x_2, \ldots, x_m; f\,|\,x)$, unde nodurile x_α, $\alpha=1, 2, \ldots, m$ nu sînt neapărat distincte. Se notează cu

$F_\gamma[f|x]$ suma termenilor din acest polinom care conţin numai valorile derivatelor pe noduri pînă la ordinul γ inclusiv. Teoremele 1, 2 exprimă cazuri cînd operatorul $F_\gamma[f|x]$ nu conservă neconcavitatea de ordinul n pe nici un interval. Teorema 3 se referă la cazul nodurilor toate confundate. Atunci $F_\gamma[f|x]$ revin la polinoamele lui Taylor relative la funcţia f. Teorema 4 enunţă cîteva proprietăţi de conservare a alurii de convexitate în cazul cînd avem numai două noduri distincte, unul fiind simplu. Lucrarea mai conţine cîteva rezultate referitoare la conservarea alurii de convexitate în cazul general a două noduri distincte.