

REMARQUES SUR CERTAINES FORMULES DE LA MOYENNE

par Tiberiu Popoviciu à Cluj (Roumanie)

Dédié à M. O. Borůvka à l'occasion de son 70-ième anniversaire

Présenté le 14 Avril 1969

1. Considérons une fonctionnelle linéaire (donc additive et homogène) réelle $R[f]$, définie sur un espace vectoriel S formé par des fonctions réelles et continues $f(x)$, définies sur un intervalle donné I (de longueur non nulle) de l'axe réel. Nous supposons toujours que S contient tous les polynômes. L'espace S peut coïncider avec l'ensemble de toutes les fonctions continues $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, mais peut aussi être plus restreint. Dans la suite lorsqu'il est nécessaire on précisera l'ensemble S et la nature de ses éléments.

Le degré d'exactitude de $R[f]$ est l'entier $m \geq -1$ qui jouit de la propriété suivante:

$$R[1] \neq 0 \text{ si } m = -1, \\ R[1] = R[x] = \dots = R[x^m] = 0, R[x^{m+1}] \neq 0 \text{ si } m \geq 0.$$

Le degré d'exactitude peut ne pas exister, mais s'il existe il est bien déterminé. L'existence d'un degré d'exactitude égal à m est équivalent au fait que la fonctionnelle linéaire $R[f]$ s'annule sur tout polynôme de degré m mais est différent de zéro sur au moins un polynôme de degré $m + 1$.

Lorsqu'il est nécessaire on précisera encore la nature de la fonctionnelle linéaire $R[f]$.

Rappelons la définition suivante de la *simplicité* de la fonctionnelle linéaire $R[f]$:

La fonctionnelle linéaire $R[f]$ est dite de la forme simple s'il existe un entier $m \geq -1$, indépendant de la fonction $f(x)$, tel que pour tout $f(x) \in S$ on ait

$$(1) \quad R[f] = K[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+2}; f],$$

où K est une constante différente de zéro indépendante de la fonction $f(x)$ et ξ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, m + 2$ sont $m + 2$ points distincts de l'intervalle I , dépendant en général de la fonction $f(x)$.

Le nombre m est déterminé complètement et est précisément le degré d'exactitude de $R[f]$. On a d'ailleurs $K = R[x^{m+1}]$.

Dans la formule (1) nous désignons par $[y_1, y_2, \dots, y_r; f]$ la différence divisée, d'ordre $r - 1$, de la fonction $f(x)$ sur les points ou noeuds (distincts ou non) $y_1, y_2, \dots, y_r$.

La théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur permet de trouver divers critères de simplicité de la fonctionnelle linéaire $R[f]$. Par exemple, un tel critère peut s'énoncer de la manière suivante:

Théorème 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle linéaire $R[f]$, de degré d'exactitude m , soit de la forme simple est que l'on ait $R[f] \neq 0$ pour toute fonction $f(x) \in S$ convexe d'ordre m .*

Une fonction $f(x)$ est dite *convexe d'ordre m* sur I si toutes ses différences divisées $[x_1, x_2, \dots, x_{m+2}; f]$, d'ordre $m + 1$, sur des noeuds $x_1, x_2, \dots, x_{m+2} \in I$ distincts, sont positives. Si ces différences divisées sont toutes non-négatives la fonction est dite *non-concave d'ordre m* (sur I). Enfin si les différences divisées d'ordre $m + 1$ de la fonction $f(x)$ sont toutes négatives respectivement toutes non-positives, cette fonction est dite *concave respectivement non-convexe d'ordre m* . Par le passage de la fonction $f(x)$ à la fonction $-f(x)$, les propriétés concernant les fonctions concaves respectivement non-convexes d'ordre m se déduisent, en général, des propriétés correspondantes des fonctions convexes respectivement non-concaves d'ordre m . •

Lorsque $R[f]$ est de degré d'exactitude m et est de la forme simple on a

$$(2) \quad R[x^{m+1}] R[f] > 0$$

pour toute fonction $f(x) \in S$ convexe d'ordre m . En effet, d'abord x^{m+1} est bien convexe d'ordre m . Ensuite, si $R[x^{m+1}] R[f] \leq 0$ pour une fonction $f(x)$ convexe d'ordre m , pour la fonction $f_1(x) = \{R[x^{m+1}]\}^2 f(x) - R[x^{m+1}] R[f] x^{m+1}$, qui est encore convexe d'ordre m , on aurait $R[f_1] = 0$ ce qui, d'après le théorème 1, est impossible.

Dans les mêmes conditions si $f(x)$ est une fonction non-concave d'ordre m , on a

$$(3) \quad R[x^{m+1}] R[f] \geq 0.$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $f(x) + \varepsilon x^{m+1}$ est convexe d'ordre m et nous avons donc $R[x^{m+1}] \{R[f] + \varepsilon R[x^{m+1}]\} = R[x^{m+1}] R[f] + \varepsilon \{R[x^{m+1}]\}^2 > 0$, d'où, en faisant tendre ε vers 0, on déduit l'inégalité (3).

Pour les propriétés des fonctions convexes d'ordre supérieur, pour la notion de simplicité d'une fonctionnelle linéaire et pour diverses autres propriétés utilisées dans ce travail, on peut consulter mes travaux antérieurs. Par exemple, mon travail de „Mathematica“ [4].

Si $m \geq 0$, on peut même affirmer que les points ξ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, m + 2$ dans (1) sont à l'intérieur de l'intervalle I .

Si $m \geq 0$, si $R[f]$ est de degré d'exactitude m , est de la forme simple et si $f(x)$ à une dérivée $f^{(m+1)}(x)$ d'ordre $m + 1$ à l'intérieur de I , nous avons

$$(4) \quad R[f] = R[x^{m+1}] \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

où ξ est un point à l'intérieur de l'intervalle I .

Les formules (1), (4) permettent, dans le cas de la simplicité, de délimiter la fonctionnelle $R[f]$ lorsqu'on connaît des délimitations de la différence divisée d'ordre $m + 1$ de la fonction $f(x)$, ou bien des délimitations de la $(m + 1)$ ième dérivée $f^{(m+1)}(x)$, supposée existante, de cette fonction.

2. Supposons que la fonctionnelle linéaire $R[f]$ soit définie sur l'ensemble S des fonctions continues sur I et ayant une dérivée $f^{(m+1)}(x)$ d'ordre $m + 1$ sur l'intérieur de I . En plus nous supposons $m \geq 0$, que $R[f]$ soit de degré d'exactitude m et de la forme simple. Alors si ξ est un point donné de l'intérieur de I , la fonctionnelle

$$(5) \quad R[f] - R[x^{m+1}] \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

est linéaire et s'annule sur tout polynome de degré $m + 1$. En prenant $f(x) = x^{m+2}$ et en tenant compte de la formule de la moyenne (4), on voit qu'il existe une valeur bien déterminé c (de l'intérieur de l'intervalle I) de ξ pour laquelle la fonctionnelle (5) s'annule aussi sur tout polynome de degré $m + 2$. Le nombre c est donné par l'équation

$$(6) \quad R[x^{m+2}] - (m + 2) R[x^{m+1}] c = 0$$

Nous avons le

Lemme 1. *Sous les hypothèses précédentes la fonctionnelle linéaire*

$$(7) \quad R_1[f] = R[f] - R[x^{m+1}] \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}$$

est définie sur S et est de degré d'exactitude $m + 2$.

Il suffit de démontrer que $R[x^{m+3}]$ n'est pas nul.

Compte tenant de (6), nous déduisons

$$(8) \quad R[x^{m+1}] R_1[x^{m+3}] = \frac{1}{2(m+2)} \{ 2(m+2) R[x^{m+1}] R[x^{m+3}] - (m+3) R^2[x^{m+2}] \}$$

Si nous posons

$$(9) \quad P(x) = x^{m+3} + (m+3)zx^{m+2} + \frac{(m+2)(m+3)}{2}z^2x^{m+1}$$

où z est un paramètre indépendant de x , nous avons

$$P^{(m+1)}(x) = \frac{(m+3)!}{2} (x+z)^2$$

Nous avons donc $P^{(m+1)}(x) > 0$ pour $x \neq -z$. Il en résulte que le polynôme (9) est convexe d'ordre m (partout). Nous avons, d'après (2),

$$\begin{aligned} R[x^{m+1}] R[P] = \\ = R[x^{m+1}] \{R[x^{m+3}] + (m+3) R[x^{m+2}] z + \\ + \frac{(m+2)(m+3)}{2} R[x^{m+1}] z^2\} > 0 \end{aligned}$$

quel que soit z . Il résulte que le discriminant de ce trinôme de second degré est négatif, donc

$$(m+3) \{(m+3) R^2[x^{m+2}] - 2(m+2) R[x^{m+1}] R[x^{m+3}]\} < 0$$

et l'égalité (8) nous montre que

$$(10) \quad R[x^{m+1}] R_1[x^{m+3}] > 0.$$

Le lemme 1 en résulte.

Nous verons plus loin que la fonctionnelle linéaire (7) est de la forme simple.

3. Nous allons supposer maintenant que l'intervalle I se réduise à l'intervalle borné et fermé $[a, b]$ ($a < b$) et que les éléments $f(x)$ de S aient une dérivée $(m+1)^{\text{ième}}$ continue sur $[a, b]$.

On suppose toujours $m \geq 0$.

Soit alors $R[f]$ une fonctionnelle linéaire définie sur S , de degré d'exactitude m et de la forme simple et considérons la fonctionnelle linéaire (7), le nombre c étant déterminé par l'équation (6). Nous avons alors $a < c < b$.

Nous avons le

Lemme 2. *Sous les hypothèses précédentes, s'il existe un entier k , $0 \leq k \leq m+1$ tel que la fonctionnelle linéaire $R[f]$ soit bornée par rapport à la norme*

$$(11) \quad ||f|| = \sum_{\alpha=0}^k \max_{x \in [a, b]} |f^{(\alpha)}(x)|$$

nous avons

$$(12) \quad R[x^{m+1}] R_1[f] \geq 0$$

pour toute fonction $f(x) \in S$ non-concave d'ordre $m+2$.

Considérons les fonctions

$$\varphi_{m+3,\lambda}(x) = \left(\frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2} \right)^{m+2}$$

où λ est un paramètre indépendant de x et compris entre a et b .

La fonction $\varphi_{m+3,\lambda}(x)$ appartient à S et est non-concave d'ordre $m + 2$ pour tout λ . Nous avons

$$\varphi_{m+3,\lambda}^{(m+1)}(x) = (m + 2)! \left(\frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2} \right) = (m + 2)! \varphi_{2,\lambda}(x)$$

Nous allons démontrer que l'inégalité (12) est vérifiée pour cette fonction, donc si nous posons $f(x) = \varphi_{m+3,\lambda}(x)$. En effet,

$$R_1[\varphi_{m+3,\lambda}] = R[\varphi_{m+3,\lambda}] - (m + 2) R[x^{m+1}] \varphi_{2,\lambda}(c)$$

et si nous tenons compte de (6), nous avons

$$R_1[\varphi_{m+3,\lambda}] = \begin{cases} R[\varphi_{m+3,\lambda} - x^{m+2} + (m + 2) \lambda x^{m+1}] & \text{si } \lambda \leq c \\ R[\varphi_{m+3,\lambda}] & \text{si } \lambda \geq c. \end{cases}$$

Mais les fonctions

$$\varphi_{m+3,\lambda}(x), \varphi_{m+3,\lambda}(x) - x^{m+2} + (m + 2) \lambda x^{m+1}$$

sont non-concaves d'ordre m puisque leurs dérivées d'ordre $m + 1$ sont

$$(m + 2)! \left(\frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2} \right) \geq 0, \quad (m + 2)! \left(\frac{|x - \lambda| - x + \lambda}{2} \right) \geq 0$$

respectivement.

Nous avons donc

$$R[x^{m+1}] R_1[\varphi_{m+3,\lambda}] \geq 0$$

et, compte tenant de (10),

$$R_1[x^{m+3}] R_1[\varphi_{m+3,\lambda}] \geq 0$$

pour tout λ compris entre a et b .

D'un théorème de notre travail cité [4] (théorème 15) il résulte que la fonctionnelle linéaire $R_1[f]$ est de la forme simple, donc l'inégalité (12) est vraie pour toute fonction $f(x) \in S$ non-concave d'ordre $m + 2$ (et même sans égalité possible si $f(x)$ est *convexe* d'ordre $m + 2$).

Le lemme 2 est donc démontré.

Remarque. Nous avons écrit la norme qui intervient dans le lemme 2 sous la forme (11). On pourrait la remplacer facilement par une autre

ne contenant linéairement que $\max |f(x)|$ et $\max |f^{(m+1)}(x)|$, en vertu de certaines délimitations données par J. HADAMARD pour les dérivées d'ordres intermédiaires.

4. Nous pouvons maintenant démontrer le

Théorème 2. *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:*

1. *m est un entier non-négatif.*
 2. *S est l'espace des fonctions $f(x)$ ayant une dérivée continue d'ordre $m + 1$ sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$ ($a, < b$) (ce qui entraîne la continuité de $f(x)$ et de toutes ses dérivées d'ordres 1, 2, ..., $m + 1$ sur $[a, b]$).*

3. *$R[f]$ est une fonctionnelle linéaire définie sur S , de degré d'exactitude m , de la forme simple et bornée par rapport à la norme (11) pour un certain entier k , $0 \leq k \leq m + 1$.*

4. *c est le point déterminé par l'équation (6) (On a alors $a < c < b$).*

5. *La fonction $f(x)$ vérifie de plus l'une des 4 propriétés suivantes:*

A. *est non-concave d'ordre $m + 1$ et non-concave d'ordre $m + 2$,*

B. *est non-convexe d'ordre $m + 1$ et non-concave d'ordre $m + 2$,*

C. *est non-concave d'ordre $m + 1$ et non-convexe d'ordre $m + 2$,*

D. *est non-convexe d'ordre $m + 1$ et non-convexe d'ordre $m + 2$,*

alors la formule de la moyenne (4) est vérifiée dans les cas A et D par au moins un point ξ de l'intervalle $[c, b]$ et dans les cas B, C pour au moins un point ξ de l'intervalle $[a, c]$.

Il suffit de faire ici la démonstration dans le cas A. Dans ce cas la fonction

$$(13) \quad g(x) = R[x^{m+1}] \left\{ R[f] - R[x^{m+1}] \frac{f^{(m+1)}(x)}{(m+1)!} \right\}$$

est non-croissante sur $[a, b]$ et s'annule surement sur au moins un point intérieur de l'intervalle $[a, b]$. Nous avons donc $g(a) \geq 0$, $g(b) \leq 0$ et du lemme 2 il résulte que $g(c) \geq 0$. La propriété cherchée en résulte. Remarquons d'ailleurs que les points ξ qui vérifient (4) forment un intervalle et la propriété obtenue signifie que cet intervalle a au moins un point en commun avec $[c, b]$. Lorsque, en particulier, la fonction $f(x)$ est convexe d'ordre $m + 1$, le point ξ de (4) est unique et appartient à l'intervalle $[c, b]$.

On démontre de la même manière le théorème 2 dans les cas B, C, D. D'ailleurs les cas D, C se déduisent respectivement des cas A, B en passant de la fonction $f(x)$ à la fonction $-f(x)$.

5. Comme une première application nous avons le

Corollaire 1. *Si $R[f]$ est le reste de la formule de quadrature du type Gauss.*

$$(14) \quad \int_a^b f(x) dV(x) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} f(x_{\alpha}) + R[f]$$

où n est un nombre naturel, $V(x)$ une fonction non-décroissante, ayant au moins $n + 1$ points de croissance et $f(x)$ une fonction admettant une dérivée continue d'ordre $2n$ sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$, la formule de la moyenne

$$R[f] = R[x^{2n}] \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}$$

est vérifiée, dans les cas A, D du théorème 2, pour au moins un point ξ de l'intervalle $[c, b]$ et dans les cas B, C du théorème 2, pour au moins un point ξ de l'intervalle $[a, c]$.

On a posé $m = 2n - 1$ et c est donné par l'équation (6) correspondante.

Dans la formule (14) x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$ sont les racines (distinctes et situées à l'intérieur de $[a, b]$) du polynome orthogonal de degré n relatif à la distribution $dV(x)$. Les λ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$ sont les coefficients (tous > 0) de Christoffel correspondants.

On peut généraliser cette propriété pour des formules du type Gauss plus générales et que nous avons étudié dans un autre travail [3].

6. Comme une autre application du théorème 2, nous avons le

Corollaire 2. Si la fonction $f(x)$ est continue et a une dérivée $(m + 1)^{\text{ème}}$ continue sur un intervalle contenant les $m + 2$ points x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, m + 2$ donnés, non tous confondus ($m \geq 0$), la formule de la moyenne de Cauchy,

$$[x_1, x_2, \dots, x_{m+2}; f] = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m + 1)!}$$

est vérifiée, dans les cas A, D du théorème 2, pour au moins un point

$\xi \geq \frac{1}{m + 2} \sum_{\alpha=1}^{m+2} x_\alpha$ et dans les cas B, C du théorème 2, pour au moins un

point $\xi \leq \frac{1}{m + 2} \sum_{\alpha=1}^{m+2} x_\alpha$.

La différence divisée $[x_1, x_2, \dots, x_{m+2}; f]$ où les noeuds x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, m + 2$ sont distincts ou non est définie comme d'habitude.

On voit bien que la fonctionnelle linéaire

$$R[f] = [x_1, x_2, \dots, x_{m+2}; f]$$

vérifie toutes les hypothèses du théorème 2 (porvu que les points x_α ne soient pas tous confondus), $[a, b]$ étant un intervalle qui contient les noeuds x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, m + 2$. Dans ce cas le point c est précisément

la moyenne arithmétique $\frac{1}{m + 2} \sum_{\alpha=1}^{m+2} x_\alpha$ de ces noeuds.

En prenant $m = 0$, on obtient les propriétés correspondantes relatives à la formule des accroissements finis

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi).$$

Nous pouvons nous dispenser d'énoncer ces propriétés.

7. La propriété exprimée par le Corollaire 2 peut se démontrer aussi directement de la manière suivante. Pour fixer les idées supposons que nous soyons dans le cas A, donc que $f(x)$ soit non-concave d'ordre $m + 1$ et non-concave d'ordre $m + 2$. En raisonnant comme nous l'avons fait sur la fonction (13) pour la démonstration du théorème 2 et en utilisant quelques formules bien connues relatives aux différences divisées, nous avons d'abord, en supposant $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{m+2}$,

$$\begin{aligned} & [x_1, x_2, \dots, x_{m+2}; f] - \frac{f^{(m+1)}(x_1)}{(m+1)!} = \\ &= \sum_{\alpha=2}^{m+2} [x_1, x_1, \dots, x_1, x_2, x_3, \dots, x_\alpha; f] (x_\alpha - x_1) \geq 0, \\ & \quad [x_1, x_2, \dots, x_{m+2}; f] - \frac{f^{(m+1)}(x_{m+2})}{(m+1)!} = \\ &= - \sum_{\alpha=1}^{m+1} [x_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_{m+1}, \underbrace{x_{m+2}, x_{m+2}, \dots, x_{m+2}}_{\alpha+1}; f] (x_{m+2} - x_\alpha) \leq 0. \end{aligned}$$

Ici dans les seconds membres les termes où figurent des différences divisées prises sur des noeuds tous confondus doivent être supprimés.

Ensuite si la fonction $f(x)$ est non-concave d'ordre $m + 2$, nous avons

$$[x_1, x_2, \dots, x_{m+2}; f] \geq \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{m+2}}{m+2} \right)$$

comme nous l'avons démontré dans un autre travail [2].

8. La propriété exprimée par le corollaire 1 résulte d'ailleurs de la propriété exprimée par le corollaire 2. En effet, des formules que nous avons établi autrefois [1], il résulte que le reste $R[f]$ de la formule de Gauss (14) diffère seulement par un facteur constant positif de la différence divisée d'ordre $2n$ de la fonction $f(x)$ ayant comme noeuds les racines des polynomes orthogonaux des degrés n et $n + 1$.

Dans certains cas on peut procéder aussi autrement. Prenons en particulier $V(x) = x$. Alors x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$ sont les racines du polynome $P_n(x) = \prod_{\alpha=1}^n (x - x_\alpha)$ de Legendre de degré n (avec le plus haut coefficient égal à 1) relatif à l'intervalle $[a, b]$. Alors en désignant par $F(x)$ une primitive de la fonction $f(x)$, nous avons

$$R[f] = F(b) - F(a) - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} F'(x_{\alpha}) = R^*[F]$$

Puisque $R[f]$ est de degré d'exactitude $2n - 1$, $R^*[F]$ est de degré d'exactitude $2n$, donc ne diffère que par un facteur constant (positif) de la différence divisée de la fonction $F(x)$ sur les noeuds $a, b, x_{\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, n$, les n dernier comptés chacun deux fois. On voit facilement que

$$R[f] = R^*[F] = (b - a) P_n^2(b) [a, b, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n; F]$$

La propriété énoncée en résulte.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Popoviciu, T.: *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IV)*, Disquisitiones Math. et Physicae, I, 163—171 (1940).
- [2] Popoviciu, T.: *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (V)*, Bulletin de l'Acad. Roumaine, XXII, 351—356 (1940).
- [3] Popoviciu, T.: *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*, Studii si Cerc. Stiintifice, Iași, VI, 29—57 (1955).
- [4] Popoviciu, T.: *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*, Mathematica, 1 (24), 95—142 (1959).

Université de Cluj
Roumanie