Sur la conservation de l'allure de convexité des fonctions par des polynomes d'approximation

Par
TIBERIU POPOVICIU
L'INSTITUT DE CALCUL
DE LA FILIALE DE CLUJ DE L'ACADÉMIE
DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE LA ROUMANIE

1. Dans les problèmes d'approximation on cherche d'habitude une fonction d'approximation φ de la fonction donnée f de manière que l'erreur $f-\varphi$ de l'égalité approximative

(1) $$f \approx \varphi$$

vérifie certaines restrictions (délimitations, etc.) imposées par la nature même du problème considéré.

Mais il est important de chercher à *conserver* par l'approximation (1) certaines propriétés d'allure de la fonction f. En général la fonction d'approximation φ est choisie dans un certain ensemble déterminé de fonctions, ensemble qui dépend d'une certaine manière de la fonction f. On peut, par exemple, choisir φ dans un ensemble vérifiant certaines conditions interpolatoires.

Évidemment il faudrait tout d'abord préciser ce qu'on entend par l'allure, plus exactement par une allure déterminée, d'une fonction et ensuite ce qu'on entend par conserver cette allure. Nous ne chercherons pas à donner une définition de l'allure d'une fonction. Nous étudierons seulement quelques propriétés que nous convenons de considérer comme caractérisant certaines allures, tel que: la non-négativité, la monotonie, la convexité d'un ordre donné, etc.

2. Pour préciser considérons l'opérateur $F[f|x]$ défini sur l'espace des fonctions f, réelle et d'une variable réelle x, définies sur un ensemble E de l'axe réel, ayant ses valeurs dans l'ensemble des fonctions réelles définies sur l'ensemble I de l'axe réel. Dans la suite nous supposerons, sauf avis contraire, que l'opérateur $F[f|x]$ est linéaire et nous introduisons la

DÉFINITION. *Nous dirons que l'opérateur* $F[f|x]$ *conserve* (sur I) *la convexité, la non-concavité, la polynomialité, la non-convexité respectivement la concavité d'ordre n* (de la fonction f) *si la fonction* $F[f|x]$ *de x est convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe respectivement concave d'ordre n* (sur I) *pour toute fonction convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe respectivement concave d'ordre n* (sur E).

P. L. Butzer et al. (eds.), *Abstract Spaces and Approximation / Abstrakte Räume und Approximation*

Rappelons qu'une fonction f est dite convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe respectivement concave d'ordre n ($\geqq -1$) sur E si toutes les différences divisées d'ordre $n+1$, $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2};\ f]$ de cette fonction sur $n+2$ points, ou noeuds, distincts quelconques $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ de E sont positives, non-négatives, nulles, non-positives respectivement négatives. Les propriétés de ces fonctions, ainsi que des différences divisées, sont bien connues. On passe des fonctions convexes, non-concaves respectivement polynomiales d'ordre n aux fonctions concaves, non-convexes respectivement polynomiales d'ordre n en changeant leur signe (sur E) donc en passant de f à $-f$ et vice versa. Les propriétés de conservation de la concavité et de la non-convexité résultent donc simplement (dans le cas des opérateurs linéaires $F[f|x]$), des propriétés de conservation de la convexité et de la non-concavité du même ordre. Le cas $n=-1$ correspond à la conservation du signe de la fonction. Les opérateurs positifs (et en général les opérateurs non-négatifs) jouent un rôle très important dans la théorie de l'approximation polynomiale, trigonométrique et d'autres approximations du même type. Le cas $n=0$ correspond à la conservation de la monotonie et $n=1$ à la conservation de la convexité habituelle.

3. Nous avons étudié le cas $n > -1$ pour plusieurs opérateurs déterminés. Nos recherches ont commencé par la remarque que le polynome bien connu de S. N. Bernstein

$$\sum_{\alpha=0}^{m} f\left(\frac{\alpha}{m}\right)\binom{m}{\alpha} x^{\alpha}(1-x)^{m-\alpha} \tag{2}$$

conserve sur l'intervalle [0, 1] la non-concavité d'ordre n de la fonction f pour tout $n \geqq -1$ [2]. Dans ce cas nous pouvons prendre $E=I=[0, 1]$. Nous avons obtenu quelques résultats généraux concernant des opérateurs du type (2) [5] et concernant la conservation du signe et de la monotonie par les polynomes d'interpolation de L. Fejér [6], qui est aussi du même type. Nous avons aussi obtenu certains résultats analogues pour le polynome d'interpolation de Lagrange [4], [7].

Nous désignerons par $L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f|x)$ le polynome de Lagrange (de degré n) prenant les mêmes valeurs que la fonction f sur les $n+1$ noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Du fait que le coefficient de x^n dans le polynome $L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f|x)$ est égal à $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ il résulte la propriété, presque évidente, que si $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in E$, ce polynome conserve la non-concavité d'ordre $n-1$ sur tout intervalle I. Cette propriété est d'ailleurs équivalente à la non-concavité d'ordre $n-1$. Mais il est facile de démontrer que ce polynome conserve la non-concavité d'ordre $n-2$ sur l'intervalle $\left[\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \frac{x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}}{n}\right]$ en supposant que $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$ [4]