

auf kombinatorischen Betrachtungen beruht. – Eine zweite, später erscheinende Mitteilung bringt den noch fehlenden Beweis eines Existenzsatzes für Scheitel mit Hilfe des Grundgedankens von MUKHOPADHYAYA.

Non Negative Definite Solutions of Certain Differential and Functional Equations*)

E. LUKACS

Problems in probability theory or mathematical statistics are often formulated in terms of random variables or distribution functions since this is the natural way in which they occur. However, it is often desirable, and also possible, to reformulate these problems in such a way that they involve only the Fourier-Stieltjes transforms of distribution functions, called in probabilistic terminology characteristic functions.

The original problem takes then the form of a differential equation or of a functional equation which the characteristic function (or functions) must satisfy. However, it is not enough to solve this equation since the solution of the equation will in general contain also functions which are not characteristic functions and which do not lead to a solution of the original probabilistic or statistical problem. It is known (BOCHNER's theorem) that a function $f(t)$ is a characteristic function if, and only if, it is non-negative definite and if $f(0)=1$. The main difficulty in problems of this kind is often the determination of those solutions of a differential or functional equation which are non-negative definite.

The paper gives a survey of studies of these problems. Section 2 deals with certain functional equations while section 3 treats questions concerning the non-negative definite solutions of certain differential equations.

Sur le reste de certaines formules de quadrature**)

TIBERIU POPOVICIU

Le reste $R[f]$ de la formule de quadrature

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha} f(x_{\alpha}) + R[f] \quad (1)$$

où les noeuds x_{α} de l'axe réel sont distincts et les A_{α} sont des constantes réelles données, est de la forme

$$R[f] = A[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+2}; f] + B[\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{m+2}; f] \quad (2)$$

*) Received December 12, 1967

**) Reçu le 12.12.1967

La fonction f est supposée continue, m est le degré d'exactitude de la formule (1), les points ξ_{α} d'une part et les points ξ'_{α} d'autre part, sont distincts mais dépendent en général de la fonction f . Les constantes A, B sont indépendantes de la fonction f . Enfin $[y_1, y_2, \dots, y_r; f]$ désigne la différence divisée, d'ordre $r-1$, de la fonction f sur les noeuds $y_1, y_2, \dots, y_r$.

Lorsque dans (2) on peut prendre $B=0$ le reste $R[f]$ (ou la formule de quadrature (1)) est dit *de la forme simple*. Cette dernière notion est en étroite liaison avec la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur [1].

Dans le présent travail on montre comment, sous des hypothèses bien précisées, dans le cas où le reste n'est pas de la forme simple, on peut rétablir une sorte de simplicité par une généralisation convenable de la notion de différence divisée et de la convexité correspondante.

[1] POPOVICIU, Tiberiu, *Mathematica I* (24), 95-142 1959.

Endomorphismenringe in der Galoisschen Theorie*)

WOLFGANG KRULL

Es sei N ein beliebiger Körper. Jedem $c \in N$ werde der durch „ $c'a = c \cdot a$ “ für alle $a \in N$ “ festgelegte Endomorphismus c' der additiven Gruppe N zugeordnet. Dann gilt: *Allgemeinster Unabhängigkeitssatz*: Sind $A_1, \dots, A_n$ paarweise verschiedene Automorphismen des Körpers (und damit Endomorphismen der additiven Gruppe) N , so folgt aus „ $(\sum_{i=1}^n c'_i A_i) \alpha = 0$ für alle $\alpha \in N$ “ stets $c'_1 = \dots = c'_n = 0$. – Der Beweis arbeitet mit der Vandermondeschen Determinante; er ist konstruktiv und völlig elementar. – Es sei jetzt N separabel und normal über K mit der Galoisgruppe $G = \{A_1, \dots, A_n\}$. Für einen beliebigen Körper L zwischen N und K werde $L' = \{c' \mid c \in L\}$ gesetzt. Nach ARTIN betrachtet man schon in der elementaren Galoisschen Theorie den Ring K'_G aller Endomorphismen $\{\sum_{i=1}^n a'_i A_i \mid a_i \in K\}$, der zum Gruppenring von G über K isomorph ist. Angesichts des allgemeinsten Unabhängigkeitssatzes erscheint es angebracht, neben K'_G gleich auch den Ring N'_G aller Endomorphismen $\{\sum_{i=1}^n c'_i A_i \mid c' \in N\}$ einzuführen. N'_G ist ein Vektorraum der Dimension n^2 über K' , aber *nicht* zum Gruppenring von G über N isomorph, weil i. a. $A_i c' = (A_i c)' A_i \neq c' A_i$. Definiert man für den Körper L das Rechtsideal $R'_{G,L}$ von N'_G durch $R'_{G,L} = \{\phi \mid \phi c \in L \text{ für alle } c \in N\}$, so gelten die Sätze: Es ist $R'_{G,L}$ gleich der von dem Komplexprodukt $L' \cdot R'_{G,K}$ erzeugten additiven

*) Eingegangen am 13.12.1967