Sur le reste de certaines formules de quadrature

TIBERIU POPOVICIU à Cluj (Roumanie)

Dédié à M. A. Ostrowski à l'occasion de son 75ième anniversaire

1. On peut exprimer de plusieurs manières le reste $R[f]$ de la formule de quadrature

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha f(x_\alpha) + R[f] \tag{1}$$

où x_α $(\alpha=1, 2,\ldots, n)$ sont des points distincts de l'axe réel et A_α, $\alpha=1, 2,\ldots, n$ des constantes réelles données, indépendantes de la fonction f. Nous supposerons que a et b, où $a<b$, soient finis, que toutes les fonctions considérées soient réelles, et nous désignerons par I un intervalle contenant les points a, b, x_α, $(\alpha=1, 2,\ldots, n)$.

Soit m le degré d'exactitude du reste $R[f]$ (ou de la formule de quadrature (1)), donc le nombre, bien déterminé par les conditions: $R[1]=R[x]=\cdots=R[x^m]=0$, $R[x^{m+1}]\neq 0$. Si $R[1]\neq 0$ nous prenons $m=-1$ et si $R[1]=0$ nous avons $0\leqq m\leqq 2n-1$.

Si f est une fonction continue sur l'intervalle I nous avons [1]

$$R[f] = A[\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_{m+2}; f] + B[\xi'_1, \xi'_2,\ldots, \xi'_{m+2}; f]. \tag{2}$$

Les points ξ_α, d'une part, et les points ξ'_α, d'autre part, sont distincts mais dépendent en général de la fonction f. Les constantes A, B sont indépendantes de la fonction f. Nous avons $A+B=R[x^{m+1}]$ et $[y_1, y_2,\ldots, y_r; f]$ désigne la différence divisée, d'ordre $r-1$, de la fonction f sur les points (ou noeuds) $y_1, y_2,\ldots, y_r$. Si $m\geqq 0$ les points ξ_α, ξ'_α, peuvent être choisis à l'intérieur de l'intervalle I et si de plus la fonction f a une $(m+1)$-ième dérivée $f^{(m+1)}$ à l'intérieur de I, on a

$$R[f] = A\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} + B\frac{f^{(m+1)}(\xi')}{(m+1)!} \tag{3}$$

ξ, ξ', étant deux points de l'intérieur de l'intervalle I et A, B étant, d'ailleurs, les mêmes constantes que dans (2).

Si on peut prendre $B=0$ dans (2) ou dans (3), on dit que le reste $R[f]$ est *de la forme simple.* Nous avons donné autrefois des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi [1], mais le reste n'est pas toujours de la forme simple.

Nous allons montrer que même si le reste n'est pas de la forme simple, dans le sens précédent, nous pouvons, dans certains cas, introduire des différences divisées

Reçu le 12.12.67

modifiées de manière que le reste devient de la forme simple par rapport à ces nouvelles différences divisées. La définition de la différence divisée qui interviendra ici résultera de ce qui suit.

2. Soit toujours m le degré d'exactitude de $R[f]$ et désignons par $k(0 \leqq k \leqq n)$ le nombre des points x_α compris dans l'intervalle ouvert (a, b). Si $k>0$ nous pouvons supposer que les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$, sont dans (a, b) et si $k<n$ que les points x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots, x_n$, sont en dehors de (a, b). Désignons par c, $d\,(c \leqq a < b \leqq d)$, les extrémités de l'intervalle I et considérons les polynomes

$$P_\alpha = (x-c)^\alpha - \frac{R[(x-c)^\alpha]}{R[(x-c)^{m+1}]}(x-c)^{m+1} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n+k)$$

qui sont bien définis puisque $R[(x-c)^{m+1}] = R[x^{m+1}] \neq 0$ et qui vérifient les égalités

$$R[P_\alpha] = 0, \ (\alpha = 0, 1, \ldots, n+k). \tag{4}$$

Il est facile de voir qu'on doit avoir $m \leqq n+k-1$. En effet si nous prenons le polynome

$$l = (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \ldots (x-x_k)^2(x-x_{k+1})(x-x_{k+2}) \ldots (x-x_n)$$

(dont la forme est facile à écrire si $k=0$ ou $k=n$), nous avons

$$R[l] = \int_a^b l(x)\, dx \neq 0. \tag{5}$$

Désignons maintenant par $D(y_1, y_2, \ldots, y_{n+k+1}; f)$ le déterminant des valeurs des fonctions $P_0, P_1, \ldots, P_m, P_{m+2}, P_{m+3}, \ldots, P_{n+k}, f$ (si $m=-1$ des fonctions $P_1, P_2, \ldots,$ P_{n+k}, f) sur les points $y_1, y_2, \ldots, y_{n+k+1}$, et par $D^*(y_1, y_2, \ldots, y_{n+k})$ le mineur correspondant à l'élément $f(y_{n+k+1})$ de ce déterminant, donc le déterminant des valeurs des fonctions $P_0, P_1, \ldots, P_m, P_{m+2}, P_{m+3}, \ldots, P_{n+k}$ sur les points $y_1, y_2, \ldots, y_{n+k}$. Nous avons $D(y_1, y_2, \ldots, y_{n+k+1}; x^{m+1}) = (-1)^{n+k-m-1}\, V(y_1, y_2, \ldots, y_{n+k+1})$ où $V(y_1, y_2, \ldots,$ $y_{n+k+1})$ est le déterminant de Vandermonde des nombres $y_1, y_2, \ldots, y_{n+k+1}$.

La nouvelle différence divisée que nous introduisons est définie par la formule

$$[y_1, y_2, \ldots, y_{n+k+1}; f]^* = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n+k+1}; f)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n+k+1}; x^{m+1})}. \tag{6}$$

Dans cette définition nous avons supposé que les points y_α sont distincts. Mais on peut étendre la définition aussi au cas des points y_α non pas nécessairement distincts par un passage à la limite dans la formule (6). Ceci revient a maintenir la formule de définition (6) en modifiant convenablement le déterminant D (et aussi les déterminants

D^*, V) tel que nous l'avons expliqué antérieurement [1]. Ceci exige l'existence d'un certain nombre de dérivées de la fonction f. De cette manière la différence divisée (6) est définie quels que soient les points y_α distincts ou non.

3. Avec les notations précédentes considérons la fonction continue $\varphi(x)$ qui en dehors des points x_α est égale à la combinaison linéaire $l(x)[x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_k, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n, x; f]^*$ des fonctions $P_0, P_1 \ldots, P_m, P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_{n+k}, f$. On a alors $\varphi(x_\alpha)=0$ $(\alpha=1, 2, \ldots, n)$ donc aussi

$$R[\varphi] = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

et compte tenant de (4), (5), nous avons

$$R[f] = \frac{R[x^{m+1}]}{R[l]} \int_a^b \varphi(x)\,dx .$$

En remarquant que la fonction l ne change pas de signe sur (a, b), il en résulte que

$$R[f] = R[x^{m+1}]\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+k+1}; f]^* \tag{7}$$

où les ξ_α sont des points distincts de l'intérieur de I (dépendant en général de la fonction f), *à condition qu'on puisse appliquer les théorèmes de la moyenne aux différences divisées* (6). Je réfère le lecteur pour ces théorèmes à un travail précédent [1]. Cette condition est sûrement vérifiée si:

(H). *Le déterminant* $D^*(y_1, y_2, \ldots, y_{n+k})$ *est* $\neq 0$, *quels que soient les points* $y_1, y_2, \ldots, y_{n+k}$ *distincts ou non.*

Dans la démonstration précédente de la formule (7) on a supposé que la fonction continue f ait une dérivée (au moins sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$). On peut voir facilement que le résultat obtenu est valable sous la seule hypothèse de continuité sur l'intervalle fermé $[a, b]$ de la fonction f.

Si nous désignons par $W(g_1, g_2, \ldots, g_s)$ le wronskien des fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_s$, si nous supposons de plus que la fonction f ait une $(n+k)$-ième dérivée sur l'intérieur de I et si la condition (H) est vérifiée, nous avons (le wronskien a ses lignes et ses colonnes dans l'ordre habituel)

$$R[f] = \frac{(-1)^{n+k-m-1}}{1!\,2! \ldots (n+k)!} R[x^{m+1}] \{W(P_0, P_1, \ldots, P_m, P_{m+2}, P_{m+3}, \ldots, P_{n+k}, f)\}_{x=\xi}$$

ξ étant un point intérieur de I. Remarquons que le second membre de cette formule est de la forme

$$\sum_{\alpha=0}^{n+k-m-1} Q_\alpha(\xi) f^{(m+1+\alpha)}(\xi)$$

où Q_α est un polynome de degré α indépendant de la fonction $f (\alpha=0, 1, \ldots, n+k-m-1)$.

4. Si $p_0=1$ et p_α $(\alpha=0, 1, \ldots, n+k)$ sont les fonctions symétriques fondamentales des nombres $y_\alpha-c$, $(\alpha=1, 2, \ldots, n+k)$, nous avons

$$D^*(y_1, y_2, \ldots, y_{n+k}) = \\ = V(y_1, y_2, \ldots, y_{n+k}) \sum_{\alpha=1}^{n+k-m-1} (-1)^\alpha \frac{R[(x-c)^{m+1+\alpha}]}{R[(x-c)^{m+1}]} P_{n+k-m-1-\alpha}$$

Il en résulte que la condition (H) est vérifiée si les nombres

$$\sum_{\alpha=0}^{n+k-m-1} (-1)^\alpha \frac{R[(x-c)^{m+1+\alpha}]}{R[(x-c)^{m+1}]} \binom{s}{n+k-m-1-\alpha} (d-c)^{n+k-m-1-\alpha} \\ (s=0, 1, \ldots, n+k) \quad (8)$$

sont tous positifs ou tous négatifs.

Exemple. Considérons la formule de quadrature

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{2f(0)+6f(1)+2f(2)}{5} + R[f].$$

Dans ce cas nous avons $k=m=1$ et nous pouvons prendre $c=0$, $d=2$. Le reste n'est pas de la forme simple habituelle (on a $R[f]=\frac{7}{375}f''(\xi)-\frac{32}{375}f''(\xi')$ si la dérivée seconde existe). Dans ce cas les nombres (8) sont tous de même signe et différents de 0, donc la condition (H) est vérifiée. Si la fonction f est continue sur $[0, 2]$ et a une dérivée quatrième sur $(0, 2)$, nous avons

$$R[f] = -\tfrac{1}{60}[4f''(\xi) - 4(\xi-1)f'''(\xi) + (2\xi^2 - 4\xi + 3)f^{\mathrm{IV}}(\xi)], \quad 0<\xi<2.$$

5. On peut facilement étendre les considérations précédentes aux formule de quadrature où le second membre contient aussi linéairement certaines des valeurs sur les points x_α des dérivées succesives de la fonction f et aussi à des formules d'approximation linéaire correspondant à des fonctionnelles linéaires plus générales.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Popoviciu, T., *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*, Mathematica, Cluj *1* (24), 95–142 (1959).

Institutul de Calcul