ANALELE ŞTIINŢIFICE

ALE

UNIVERSITĂȚII „AL. I. CUZA"

DIN IAȘI

(SERIE NOUĂ)

SECȚIUNEA I

a. Matematică

TOMUL XVII, ANUL 1971

FASC. 1

ÜBER DIE KONVERGENZ VON FOLGEN LINEARER POSITIVER OPERATOREN

VON

TIBERIU POPOVICIU

(Cluj)

1. Es sei F ein Operator, der jeder *stetigen* Funktion f, die auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ $(a < b)$ definiert ist, eine Funktion von x zuordnet, die den gleichen Definitionsbereich besitzt und die wir mit $F[f \mid x]$ bezeichnen. Die Funktion f ist das *Argument*, x ist der *Parameter* und die Funktion $F[f \mid x]$ ist der *Wert* des Operators. Den Operator selbst kann man mit $F[f \mid x]$ bezeichnen und es ergibt sich immer aus dem Begleittext ob es sich um den Operaror selbst handelt oder um seinen Wert für das Element f seiner Definitionsmenge. Um hervorzuheben dass f eine Funktion der Veränderlichen t ist, bezeichnen wir diesen Operator auch mit $F[f(t) \mid x]$. In unseren Ausführungen betrachten wir nur lineare (additive und homogene) Operatoren, die, falls es notwendig ist, noch einigen zusätzlichen Bedingungen genügen. Einen Operator, der jeder Funktion f ein Polynom zuordnet, also deren Wert ein Polynom ist, nennen wir *Polynomoperator.*

Bekanntlich kann das Intervall $[a, b]$ vermittels einer linearen Transformation in ein Intervall $[c, d]$ $(c < d)$ der gleichen Art abgebildet werden, welche die Stetigkeit einer Funktion nicht beeinträchtigt und durch die ein Polynom in ein Polynom desselben Grades überführt wird. Ist die Funktion f auf $[a, b]$ definiert und setzt man $x = [(b-a)y + ad - bc]/(d-c)$ so erhält man nämlich eine Funktion $f_1(y) = f\left(\dfrac{(b-a)y + ad - bc)}{d-c}\right)$ die auf $[c, d]$ definiert ist. Bezeichnet $\omega(\delta)$ den Stetigkeitsmodul von f und $\omega_1(\delta)$ denjenigen von f_1, so gilt $\omega_1(\delta) = \omega\left(\dfrac{b-a}{d-c}\,\delta\right)$. Diese Gleichheit zeigt, dass sich bei Abschätzungen des absoluten Approximationsfehlers vermittels des Stetigkeitsmoduls die Grössenordnung durch die angegebene Transformation nicht ändert. Daher kann man o.B.d.A. statt des Intervalls $[a, b]$, das Intervall $[0, 1]$ oder $[-1, 1]$ betrachten, wodurch sich auch einige Formeln und Rechnungen vereinfachen.

2. Ist f eine auf dem Intervall $[0, 1]$ erklärte Funktion, so ergibt sich das Problem eine Folge von (linearen) Operatoren

(1) $$(F_n[f\,|\,x])_{n=0}^{+\infty}$$

so zu konstruieren, dass die Funktionenfolge $(F_n[f\,|\,x])_{n=0}^{+\infty}$ im Intervall $[0,1]$ gleichmässig gegen f konvergieren soll. Dieses Problem ist eines der wichtigsten der konstruktiven Funktionentheorie und geht auf Untersuchungen von H. Lebesgue und E. Borel zurück. Eine sehr einfache Lösung wurde von S. N. Bernstein angegeben, der die Polynome

$$B_n[f\,|\,x] = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f\left(\frac{\nu}{n}\right) x^\nu (1-x)^{n-\nu} \qquad (n \geqq 1)$$

einführte.

S. N. Bernstein zeigte, dass*)

(2) $$B_n[f\,|\,x] \rightrightarrows f(x) \text{ auf } [0, 1]$$

falls f eine auf $[0,1]$ stetige Funktion ist. Auf diese Weise wurde ein neuer und besonders einfacher Beweis des berühmten Satzes von Weierstrass über die Möglichkeit der gleichmässigen und beliebig guten Approximation einer stetigen Funktion durch Polynome gegeben.

Lange Zeit blieb jedoch die Frage einer Abschätzung und der Bestimmung der Grössenordnung des Fehlers $f(x) - B_n[f\,|\,x]$ bei der Approximation $f(x) \approx B_n[f\,|\,x]$ offen.

Dieses Problem löste ich im Jahre 1934 [3] und zeigte, dass die Ungleichung

(3) $$|f(x) - B_n[f\,|\,x]| \leqq \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ auf } [0, 1]$$

gilt, wobei $\omega(\delta)$ der Stetigkeitsmodul der Funktion f ist. Da $\omega(\delta) \to 0$ für $\delta \to 0$, falls f stetig ist, ergibt sich aus (3) die Bernsteinsche Formel (2) und folglich auch der Satz von Weierstrass.

Später, im Jahre 1942 [4], habe ich einen besonders einfachen Beweis der Ungleichung (3) gegeben.

Die Bernsteinschen Polynome erwiesen sich als besonders nützlich beim Lösen vieler Probleme der Analysis und der Funktionalanalysis. Sie gehören zu den „wunderbaren" Polynomen der mathematischen Analysis.

*) Mit dem Simbol $\rightrightarrows$ wird die gleichmässige Konvergenz bezeichnet.

Es wurde auf verschiedene Weise versucht die Formel (3) zu verbessern. Mehrere Autoren, insbesonders G. G. Lorentz [1], I. G. Sokolov [7] und P. C. Sikkema, beschäftigten sich mit der Frage den (universalen) konstanten Faktor $\frac{3}{2}$ der rechten Seite der Ungleichung (3) durch einen kleineren zu ersetzen. P. C. Sikkema [6] hat sogar den kleinsten Faktor (für $n \geqq 1$) erhalten. Wir werden weiter unten noch auf die Approximationsordnung $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ zurückkehren.

3. Die erwähnten Beweise der Ungleichung (3) beruhen hauptsächlich auf zwei Eigenschaften des Bernsteinschen Operators $B_n[f\,|\,x]$, u.zw. darauf, dass er die Funktion 1 in sich abbildet und dass er ein nichtnegativer Operator ist, d.h. dass er die *Nichtnegativität* der Funktion f *bewahrt*.

Es sei nun $F[f\,|\,x]$ ein Operator mit diesen beiden Eigenschaften d.h. es gelte

I. $F[1\,|\,x] = 1$,

II. $\underset{x}{\forall} f(x) \geqq 0 \Rightarrow \underset{x}{\forall} F[f\,|\,x] \geqq 0$.

Beachtet man die Linearität des Operators, so ergibt sich aus Eigenschaft II:

II′. $\underset{x}{\forall} f(x) \geqq g(x) \Rightarrow \underset{x}{\forall} F[f\,|\,x] \geqq F[g\,|\,x]$.

Demnach gilt auch

$\underset{x}{\forall}\, |F[f\,|\,x]| \leqq F[\,|f|\,|\,x]$.

Unter diesen Voraussetzungen können wir den absoluten Betrag der Differenz $f(x) - F[f\,|\,x]$ mit Hilfe des Stetigkeitsmoduls $\omega(\delta)$ der Funktion f abschätzen. Setzt man $\omega(0) = 0$, dann ist die Funktion $\omega(\delta)$ auf dem gesamten Intervall $[0,1]$ definiert und wegen der Stetigkeit von f ebenfalls stetig. Beachtet man die Definition von $\omega(\delta)$, so ergibt sich

$$|f(x) - f(t)| \leqq \omega(|x - t|).$$

Anderseits ist

$$f(x) - F[f\,|\,x] = f(x)\,F[1\,|\,x] - F[f\,|\,x] = F[f(x) - f(t)\,|\,x].$$

Wegen der bekannten Ungleichung [8]

$$\omega(\lambda\delta) \leqq (\lambda + 1)\,\omega(\delta) \qquad (\lambda,\ \delta \geqq 0),$$

gilt demnach

$$|f(x) - F[f\,|\,x]| \leqq F[\,|f(x) - f(t)|\,|\,x] \leqq F[\omega(|x - t|)\,|\,x] \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{1}{\delta} F[\,|x - t|\,|\,x] + 1\right)\omega(\delta),$$

wobei der Parameter δ $(0 < \delta \leqq 1)$ unabhängig von x ist und passend gewählt werden kann.

Mein erster Beweis der Ungleichung (3) [3] beruhte auf dieser Abschätzung. Ich zeigte nämlich, dass

$$\sup_{[0,1]} B_n[\,|x-t|\,|\,x] \leqq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ist. Wählt man $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n \geqq 1)$, so ergibt sich für den Operator $B_n[f\,|\,x]$ aus der Abschätzung (4) die Ungleichung (3).

4. Für einen Operator $F[f\,|\,x]$, der die obige Bedingung II erfüllt, gilt auch die Ungleichung von Cauchy-Schwarz-Bunjakowski

(5) $$\forall_x\,|F[fg\,|\,x]\,| \leqq \sqrt{F[f^2\,|\,x]\,F[g^2\,|\,x]}.$$

In der Tat, sind f, g stetige Funktionen, so gilt für beliebige reelle Zahlen α, β und für alle $x \in [0,1]$,

$$F[(\alpha f + \beta g)^2\,|\,x] = \alpha^2 F[f^2\,|\,x] + 2\alpha\beta\, F[fg\,|\,x] + \beta^2 F[g^2\,|\,x] \geqq 0.$$

Die quadratische Form in α, β der linken Seite dieser Beziehung ist jedoch genau dann nicht-negativ, wenn (5) gilt.

Genügt der Operator $F[f\,|\,x]$ auch der Bedingung I, so ergibt sich aus (5) die Ungleichung

(6) $$\forall_x\,|F[f\,|\,x]\,| \leqq \sqrt{F[f^2\,|\,x]}.$$

Aus (4) folgt dann

$$|f(x) - F[f\,|\,x]\,| \leqq \left(\frac{1}{\delta}\sqrt{F[(x-t)^2\,|\,x]} + 1\right)\omega(\delta).$$

Mein zweiter Beweis der Ungleichung (3) [4] beruhte auf dieser Abschätzung und der Feststellung, dass wegen

$$B_n[(x-t)^2\,|\,x] = \frac{x(1-x)}{n},$$

die Gleichung

$$\sup_{[0,1]} B_n[(x-t)^2\,|\,x] = \frac{1}{4n}$$

gilt.

5. In einer dritten Arbeit [5], die ich diesem Problemkreis gewidmet habe, versuchte ich die für die Folge $(B_n[f\,|\,x])_{n=1}^{+\infty}$ der Bernstein-Polynome erhaltenen Sätze auch für Folgen von allgemeineren Operatoren zu beweisen.

Genügen die linearen Operatoren der Folge (1) den obigen Bedingungen I, II und setzen wir

$$A_n = \sup_{[0,1]} F_n[\,|x-t|\,|\,x],$$

so gilt

$$|f(x) - F_n[f\,|\,x]\,| \leqq 2\omega(A_n).$$

Um diese Abschätzung zu erhalten, genügt es in der $F_n[f\,|\,x]$ entsprechenden Beziehung (4) $\delta = A_n$ zu setzen. Da uns nur die kleinen Werte von A_n interessieren, kann man annehmen, dass diese dem Definitionsbereich der Funktion $\omega(\delta)$ angehören.

Gilt

(7) $$(A_n \leqq)\; B_n = \sqrt{\sup_{[0,1]} F_n[(x-t)^2\,|\,x]} \to 0 \text{ für } n \to +\infty,$$

so folgt, dass die Funktionenfolge (1) auf [0, 1] gleichmässig gegen die Funktion f konvergiert.

In meiner Arbeit setzte ich voraus, dass $F_n[f\,|\,x]$ Polynomoperatoren der Form $\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x) f(x_\nu)$ sind, wobei $x_\nu \in [0,1]$, $\nu = 0,1,\ldots,n$ untereinander verschiedene Knotenpunkte sind und P_ν Polynome bezeichnen. Diese Voraussetzung ist jedoch nicht wesentlich, denn alle Überlegungen beruhen auf der Ungleichung (6), die, wie wir vorhin gezeigt haben, auch ohne diese Einschränkug gilt.

6. Wir setzen nun voraus, dass die Funktionenfolge $(F_n[f\,|\,x])$ für $f = x$ und $f = x^2$ auf dem Intervall [0, 1] gleichmässig gegen f konvergiert. Dann gilt

$$F_n[(x-t)^2|x] = x^2 - 2xF_n[t\,|\,x] + F_n[t^2\,|\,x] \rightrightarrows 0 \text{ auf } [0, 1].$$

In diesem Fall ist demnach Bedingung (7) erfüllt und es ergibt sich folgender Satz von Korovkinscher Art:

Genügen die linearen Operatoren $F_n[f\,|\,x]$ den Bedingungen I, II *und konvergiert die Funktionenfolge* (1) *für die Funktionen $f = x$, $f = x^2$ gleichmässig gegen f auf dem Intervall* [0,1], *dann gilt für jede stetige Funktion f*

(8) $$F_n[f\,|\,x] \rightrightarrows f(x) \text{ auf } [0, 1].$$

Man kann auch eine Formulierung angeben, in der die Bedingung nicht auftritt, u.zw.:

Genügen die linearen Operatoren $F_n[f\,|\,x]$ der Bedingung II, *so gilt* (8) *für jede stetige Funktion f genau dann, wenn* (8) *für die Funktionen $f = 1$, $f = x$, $f = x^2$ gilt.*

In diesem Falle haben wir nämlich

$$|f(x) - F_n[f\,|\,x]\,| = |(1 - F_n[1\,|\,x])f(x) + F_n[(f(x) - f(t))\,|\,x]\,| \leqq$$
$$\leqq |f(x)|\,|1 - F_n[1\,|\,x]\,| + F_n[\,|f(x) - f(t)|\,|\,x].$$

Weiterhin gilt

$$|f(x)||1-F_n[1|x]| \leqq \sup_{[0,1]}|f|.|1-F_n[1|x]| \rightrightarrows 0 \text{ auf } [0,1]$$

und

$$F_n[|f(x)-f(t)||x] \leqq \left(\frac{1}{\delta}\sqrt{F_n[(x-t)^2|x]}+1\right)\omega(\delta).$$

Es ist aber

$$F_n[(x-t)^2|x] = x^2F_n[1|x]-2xF_n[t|x]+F_n[t^2|x]\rightrightarrows 0 \text{ auf } [0,1].$$

Der Beweis kann dann wie im Falle der ersten Formulierung beendet werden.

7. Die Eigenschaft (2) gilt also nicht nur für Bernstein-Polynome. Demnach kann man auch den Satz von Weierstrass mit anderen Polynom-Folgen beweisen.

In der dritten meiner zitierten Arbeiten [5] habe ich als Anwendung gezeigt, dass falls $x_0, x_1,\dots, x_n$ die Nullstellen der Tschebyscheffschen Polynome $T_{n+1}(x)=\cos[(n+1)\arccos x]$ sind, und

(9) $$F_n[f|x]=\sum_{\nu=0}^n h_\nu(x) f(x_\nu)$$

das Fejérsche Polynom bezeichnet, d.h. den ersten Teil des Lagrange-Hermiteschen Interpolationspolynoms mit den Knotenpunkten x_ν:

(10) $$\sum_{\nu=0}^n h_\nu(x)f(x_\nu)+\sum_{\nu=0}^n k_\nu(x) f'(x_\nu)$$

dessen Werte in den Punkten $x_0,x_1,\dots,x_n$ (jeder zweimal gezählt) gleich $f(x_0), f(x_1),\dots,f(x_n)$ sind und dessen Ableitung in diesen Punkten gleich $f'(x_0), f'(x_1),\dots,f'(x_n)$ ist. So sind die Bedingungen I, II erfüllt und man erhält

(11) $$|f(x)-F_n[f|x]|\leqq 2\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \text{ auf } [-1,1].$$

In diesem Falle haben wir uns der Einfachheit halber auf das Intervall $[-1,1]$ beschränkt.

Dieses Resultat ergibt sich, wenn man beachtet, dass

$$\sum h_\nu(x)(x-x_\nu)^2 = 2T_{n+1}^2(x)\sum_{\nu=0}^n \frac{1}{(T'_{n+1}(x_\nu))^2} \leqq \frac{1}{n+1}$$

gilt.

8. Wir kehren nun zurück zur Ordnung $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ des Fehlers bei der Approximation durch Bernsteinsche Polynome. In der ersten meiner ange-

führten Arbeiten [3], habe ich durch Spezialisierung meiner Resultate für die Funktion $f=|x-1/2|$ gezeigt, dass *diese Ordnung nicht verbessert werden kann.*

Formel (11) besagt, dass die Fejérschen Polynome (mit den Tschebyscheffschen Knotenpunkten) eine *mindestens ebenso gute Approximation wie die Bernstein-Polynome ergeben.* Es sei jedoch bemerkt, dass *die Ordnung des Fehlers bei der Approximation durch Fejérsche Polynome* (mit den Tschebyscheffschen Knotenpunkten) *effektiv besser ist als jene bei der Approximation durch Bernstein-Polynome.* E. Moldovan [2] hat nämlich gezeigt, dass diese Ordnung $\omega[\ln n/n]$ beträgt und nicht $\omega(1/\sqrt{n})$.

9. Unsere vereinfachte Beweisführung, die sich auf die Ungleichung (6) stützte, ergab für den Fehler bei der Approximation durch Bernstein-Polynome und für denjenigen bei der Approximation durch Fejérsche Polynome (9) mit den Tchebyscheffschen Knotenpunkten dieselbe Ordnung. Es erhebt sich die Frage, ob diese Ordnung nicht verbessert werden kann falls man dieselbe Beweismethode benutzt, jedoch für die Polynome Fejérscher Art als Knotenpunkte nicht die Tschebyscheffschen Knotenpunkte wählt?

Wir nehmen an, (9) sei der erste Teil des Lagrange-Hermiteschen Interpolationspolynoms (10) für $n+1$ untereinander verschiedene Interpolationsstellen $x_0, x_1,\dots,x_n$ aus dem Intervall $[-1, 1]$. Die Bedingung I ist dann für die Operatoren (9) erfüllt. Damit auch die Bedingung II erfüllt wird, ist aber notwendig dass die Knotenpunkte x_ν auf eine bestimmte Art verteilt sind und zwar so, dass die Polynome h_ν nichtnegativ sind. Diese Bedingung ist im Falle der Tschebyscheffschen Knotenpunkte erfüllt. Wir nehmen an diese Bedingung sei auch für die allgemeineren Knotenpunkte erfüllt. Wir haben dann

$$F_n[(x-t)^2|x]=\sum_{\nu=0}^n h_\nu(x)(x-x_\nu)^2$$

und um die rechte Seite zu berechnen, bemerken wir, dass einerseits

(12) $$(\alpha-x)^2=\sum_{\nu=0}^n h_\nu(x)(\alpha-x_\nu)^2-2\sum_{\nu=0}^n k_\nu(x)(\alpha-x_\nu)$$

für jeden beliebigen Parameter α gilt und dass anderseits

$$k_\nu(x)=\frac{l^2(x)}{(x-x_\nu)(l'(x_\nu))^2},\quad l=0,1,\dots,n$$

ist, wobei

(13) $$l(x)=\prod_{\nu=0}^n(x-x_\nu)$$

gesetzt wurde. Für $\alpha=x$ erhält man aus (12)

$$F_n[(x-t)^2 \mid x] = 2l^2(x)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{(l'(x_\nu))^2}.$$

Um unsere Frage zu beantworten, wäre es nützlich folgendes Problem zu lösen:

Problem 1. *Man bestimme die Grösse*

(14) $$\inf_{(x_\nu)}\left\{\left(\max_{[-1,1]} l^2(x)\right)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{(l'(x_\nu))^2}\right\},$$

wobei l das Polynom (13) ist und das Infimum sich auf alle Folgen (x_ν) bezieht, für welche $-1\leq x_0<x_1<\dots<x_n\leq 1$ gilt und für die die Interpolationspolynome erster Art h_ν, $\nu=0,1,\dots,n$ auf dem Intervall $[-1,1]$ nichtnegativ sind.

Ein weiteres Problem wäre folgendes

Problem 2. *Man bestimme die Grösse (14), wobei l das Polynom (13) ist und das Infimum sich auf alle Folgen (x_ν) bezieht für die $-1\leq x_0<x_1<\dots<x_n\leq 1$ gilt.*

Das Problem 2 unterscheidet sich von Problem 1 dadurch, dass die Nichtnegativität der Polynome h_ν nicht mehr verlangt wird.

Diese beiden Probleme führen uns zu folgendem

Problem 3. *Man bestimme die Grösse*

$$\inf_{(x_\nu)}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{(l'(x_\nu))^2}$$

wobei l das Polynom (13) ist und das Infimum sich auf alle Folgen (x_ν) mit $-1\leq x_0<x_1<\dots<x_n\leq 1$ bezieht.

Wir schlagen diese drei Probleme als Forschungsprobleme vor. Es sei bemerkt, dass falls eine Folge (oder die Folge) (x_ν) Minimallösung des Problems 2 ist und die Eigenschaft hat, dass die entsprechenden Polynome h_ν, $\nu=0,1,\dots,n$ nichtnegativ sind, so ist damit auch das Problem 1 gelöst.

10. Zum Abschluss möchte ich noch zwei weitere Probleme anführen, die den obigen drei sehr ähnlich sind.

Das Restglied der Lagrangeschen Interpolationsformel

$$f(x)\approx L(x_0, x_1,\dots,x_n; f\mid x)$$

wobei $L(x_0, x_1,\dots,x_n; f\mid x)$ das Lagrangesche Polynom der Funktion f mit den Knotenpunkten $x_0, x_1,\dots,x_n$ bezeichnet, ist bekanntlich

$$R(x)=l(x)\,[x, x_0, x_1,\dots,x_n; f]$$

wobei l das Polynom (13) ist und $[x, x_0, x_1,\dots,x_n; f]$ die *dividierte Differenz* der Funktion f für die Knotenpunkte $x, x_0, x_1,\dots,x_n$.

Nehmen wir an, dass die Knotenpunkte x_ν, $\nu=0,1,\dots,n$ untereinander verschieden sind und x mit keinem dieser Knotenpunkte zusammenfällt, so gilt

$$[x, x_0, x_1,\dots,x_n; f]=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{l'(x_\nu)}[x, x_\nu; f].$$

Genügt die Funktion f der Lipschitzbedingung

$$|f(x')-f(x'')|\leq M|x'-x''|,\quad \text{für } x', x''\in[-1,1]$$

so ergibt sich

$$|R(x)|\leq\left(|l(x)|\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{|l'(x_\nu)|}\right)M,\quad \text{für } x\in[-1,1].$$

In Analogie zu den Problemen 2 und 3 formulieren wir die folgenden beiden Probleme:

Problem 4. *Man bestimme die Grösse*

$$\inf_{(x_\nu)}\left\{\max_{[-1,1]}|l(x)|\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{|l'(x_\nu)|}\right\}$$

wobei l das Polynom (13) ist und das Infimum sich auf alle Folgen (x_ν) mit $-1\leq x_0<x_1<\dots<x_n\leq 1$ bezieht.

Problem 5. *Man bestimme die Grösse*

$$\inf_{(x_\nu)}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{|l'(x_\nu)|}$$

wobei l das Polynom (13) ist und das Infimum sich auf alle Folgen (x_ν) mit $-1\leq x_0<x_1<\dots<x_n\leq 1$ bezieht.

Problem 5 ist ein klassisches Problem der Approximationstheorie. $\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{|l'(x_\nu)|}$ nimmt seinen kleinsten Wert für diejenigen Punkte an, in denen der absolute Betrag des Tschebyscheffschen Polynoms $\cos(n \arccos x)$ am grössten ist und nur in diesen Punkten. Es sind diese

$$x_\nu=\cos\frac{(n-\nu)\pi}{n},\quad \nu=0,1,\dots,n$$

und die Lösung von Problem 5 ist also 2^{n-1}.

Problem 4 dagegen ist ein noch offenes Problem.

LITERATUR

1. Lorentz G. G. — *Bernstein polynomials*. 1953.
2. Moldovan E. — *Observaţii asupra unor procedee de interpolare generalizate*. Bul. şt. Acad. R.P.R., 6, 477—482 (1954).
3. Popoviciu T. — *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. Mathematica, 10, 49—54 (1934).
4. — — *Sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes*. Annales sci. Univ. de Jassy, XXVIII, 208 (1942).
5. — — *Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare*. Lucrările ses. gen. Acad. R.P.R. din 2-12 iunie 1950, 1664-1667 (1951).
6. Sikkema P. C. — *Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen*. Numerische Math., 3, 107—116 (1961).
7. Sokolov I. G. — *Priblijenie funkţii s dannîm modulem neprerîvnosti polinomami Bernsteina*. Naukovi zapiski Livivskova derjanovo Universitetu, seria fiziko-matematicina, Tom XII, 45—52 (1949).
8. Vallée-Poussin, Ch. de la — *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Paris 1919.

DESPRE CONVERGENŢA ŞIRURILOR DE OPERATORI LINIARI ŞI POZITIVI

Rezumat

Delimitarea erorii în aproximarea prin polinoamele lui S. N. Bernstein a unei funcţii continue pe un interval mărginit şi închis a fost obţinută de autor în lucrările [3,4]. Ulterior a fost generalizată inegalitatea astfel obţinută într-o lucrare apărută într-o publicaţie greu accesibilă [5]. În prezenta lucrare se revine, cu mai multe completări, asupra rezultatelor obţinute anterior. La sfîrşitul lucrării sînt propuse 4 probleme, sugerate de cele ce preced şi a căror rezolvare ar putea aduce unele precizări în demonstrarea teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare ale lui Fejér.