

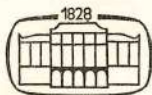
PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE ON CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS

(APPROXIMATION THEORY)

August 24—September 3, 1969

EDITED BY

G. ALEXITS (Budapest) and S. B. STECHKIN (Moscow)



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1972

ORGANIZING COMMITTEE

Presidents: G. ALEXITS (Budapest) and S. B. STECHKIN (Moscow)

Secretary: J. SZABADOS (Budapest)

Members: G. FREUD (Budapest)

A. A. GONTSAR (Moscow)

S. N. MERGELYAN (Moscow)

K. TANDORI (Szeged)

P. TURÁN (Budapest)

P. L. ULYANOV (Moscow)

CONTENTS

Preface	9
Scientific program of the Conference	11
List of participants	15
<i>G. Szegő</i> The contributions of L. Fejér to the constructive function theory	19
<i>И. И. Ибрагимов</i> О работах С. Н. Бернштейна по конструктивной теории функций	27
<i>G. Albinus</i> Approximationstheorie im Raum $C(R)$	41
<i>H.-J. Albrand und H. Kiesewetter</i> Über s -Basis und beste Approximation durch Polynome	45
<i>G. Alexits</i> An elementary method in the constructive theory of functions	53
<i>L. Alpár</i> Généralisation d'un théorème de Wiener et de Lévy	59
<i>O. B. Бессов</i> К распространению функций за пределы области с сохранением модуля гладкости в L_p	61
<i>R. Bojanic</i> A note on the precision of interpolation by Hermite-Fejér polynomials	69
<i>J. Brenner</i> Über eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen	77
<i>Z. Ciesielski</i> Approximation by spline functions and an orthonormal basis in $C^{(1)}(I^2)$	85
<i>L. Collatz</i> Zur Tschebyschew-Approximation bei Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher	89
<i>R. De Vore</i> Optimal convergence of positive linear operators	101
<i>Z. Ditzian</i> Saturation class for inversion of convolution transforms	121
<i>A. B. Ефимов</i> О приближении непрерывных функций частичными суммами Уолша-Фурье	131

<i>P. Erdős</i>	
On the distribution of the roots of orthogonal polynomials	145
<i>Margareta Frenkel</i>	
La méthode de centrage dans l'étude des équations différentielles à petit paramètre	151
<i>G. Freud and V. Popov</i>	
On approximation by spline functions	163
<i>T. Ganelius</i>	
Some approximation theorems related to Wiener's	173
<i>K. M. Garg</i>	
Characterizations of absolutely continuous and singular functions	183
<i>G. Goldner</i>	
On successive approximations for set valued mappings	189
<i>M. v. Golitschek</i>	
Approximationsverbesserung an endlich vielen Intervallpunkten. Ergänzungen zu Ergebnissen von D. Jackson und A. F. Timan	195
<i>E. Görlich and E. L. Stark</i>	
A unified approach to three problems on approximation by positive linear operators	201
<i>И. И. Ибрагимов</i>	
О полноте двух различных систем аналитических функций	209
<i>Ю. А. Казьмин</i>	
Общая проблема моментов в комплексной области	225
<i>О. Куш</i>	
Замечания об оценке погрешности тригонометрического и Лагранжева интерполирования	255
<i>I. Kolumbán</i>	
Dualität bei Optimierungsaufgaben	261
<i>Th. Kreutzkamp</i>	
Orthogonale «Lückenpolynome» im endlichen und unendlichen Intervall	267
<i>А. Ф. Леонтьев</i>	
К вопросу о восстановлении функции по известным коэффициентам её ряда Дирихле	273
<i>P. Lesky</i>	
Zur Konstruktion von Orthogonalpolynomen	289
<i>I. Maruşciac</i>	
Sur la structure des infrapolynômes généralisés préinterpolatoires	299
<i>M. Mikolás</i>	
Über die Approximation durch Treppenfunktionen in L^p	307
<i>J. Musielak</i>	
Countably modularized spaces and approximable elements	315
<i>M. W. Müller</i>	
Über asymptotische Approximationssätze für Folgen linearer positiver Operatoren	319
<i>M. Z. Nashed</i>	
On the representation and differentiability of operators	325
<i>R. J. Nessel und W. Trebels</i>	
Gebrochene Differentiation und Integration und Charakterisierung von Favard-Klassen	331

<i>L. G. Pál and F. Schipp</i>	
On the Steinhaus conjecture with respect to the Haar series	343
<i>J. Peetre</i>	
On the connection between the theory of interpolation spaces and approximation theory	351
<i>T. Popoviciu</i>	
Sur la forme du reste de certaines formules de quadrature	365
<i>M. K. Pomanos</i>	
О приближении «углом»	371
<i>G. Róna</i>	
On the Lagrange interpolation based on the zeros of Jacobi polynomials	401
<i>I. J. Schoenberg</i>	
On polynomial spline functions on the circle	
I. Their interpolatory properties	403
<i>I. J. Schoenberg</i>	
On polynomial spline functions on the circle	
II. Monosplines and quadrature formulae	419
<i>A. Sharma</i>	
Some poised problems of interpolation	435
<i>D. D. Stancu</i>	
A new class of uniform approximating polynomial operators in two and several variables	443
<i>G. Sunouchi</i>	
Direct theorems in the theory of saturation	457
<i>J. Szabados</i>	
Rational approximation to analytic functions with finite number of singularities on the real axis II	467
<i>K. Szilárd</i>	
Über die Abschätzung der Koeffizienten der Potenzreihe einer analytischen Funktion, die eine schlichte Abbildung des Einheitskreises auf ein Sterngebiet verwirklicht	475
<i>C. A. Теляковский</i>	
Интегрируемость мажоранты частных сумм тригонометрического ряда с квазивыпуклыми коэффициентами	477
<i>P. Turán</i>	
On a trigonometric inequality	503
<i>A. K. Varma</i>	
Trigonometric interpolation	513
<i>P. O. H. Vértesi</i>	
Notes on lacunary interpolations (with some supplements)	523
<i>Elena Popoviciu</i>	
Sur la meilleure approximation avec des conditions supplémentaires	529
Proposed problems	533

SUR LA FORME DU RESTE DE CERTAINES FORMULES DE QUADRATURE

T. POPOVICIU (CLUJ)

1. Dans beaucoup de formules d'approximation de l'analyse, le reste $R[f]$ est une fonctionnelle linéaire (additive et homogène) définie sur un ensemble linéaire S de fonctions f réelles continues et définies sur un même intervalle I (de longueur non nulle) de l'axe réel.

Si l'ensemble S contient tous les polynômes et si les égalités

$$(1) \quad R[1] = R[x] = \dots = R[x^m] = 0$$

ainsi que l'inégalité

$$(2) \quad R[x^{m+1}] \neq 0$$

sont vérifiées pour un certain entier $m \geq -1$, on dit que la fonctionnelle linéaire $R[f]$ est de *degré d'exactitude* m (ou que m est son degré d'exactitude). Ce nombre m , s'il existe, est d'ailleurs bien déterminé. Si $m = -1$ les relations (1), (2) doivent être remplacées par l'unique inégalité $R[1] \neq 0$.

Considérons, en particulier, la formule de quadrature

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dV(x) = \sum_{v=0}^n c_v f(x_v) + R[f]$$

où a, b ($a < b$) sont finis, $V(x)$ est une fonction à variation bornée sur $[a, b]$, $c_v, v = 0, 1, \dots, n$ des coefficients indépendants de la fonction f et les noeuds $x_v, v = 0, 1, \dots, n$ sont distincts et compris dans l'intervalle $[a, b]$.

Le reste $R[f]$ de la formule (3) est une fonctionnelle linéaire définie sur l'ensemble ($S =$) $C[a, b]$ de toutes les fonctions f continues sur l'intervalle ($I =$) $[a, b]$. Dans ce cas tous les polynômes appartiennent bien à S et le reste $R[f]$ a, en général, un degré d'exactitude bien déterminé.

2. Le reste de la formule (3) peut être mis sous diverses formes qui permettent de le délimiter sous des hypothèses convenables faites sur la fonction f .

Sans restreindre la généralité, on peut supposer $V(a) = 0$ et $(x_{-1} =) a < x_0 < x_1 < \dots < x_n < b (= x_{n+1})$.

Alors, en précisant certains résultats de G. KOWALEWSKI [1] et quelques résultats obtenus par divers auteurs, R. v. MISES, dans son mémoire sur les formules de quadrature [2], a montré que, si m est un nombre naturel et le reste $R[f]$ est de degré d'exactitude m , on peut écrire

$$(4) \quad R[f] = \int_a^b \varphi(x) f^{(m+1)}(x) dx$$

où φ est une fonction continue sur $[a, b]$ et en supposant que la fonction f ait une dérivée continue d'ordre $m+1$ sur cet intervalle.

La fonction φ est donnée par la formule

$$\varphi(x) = \frac{1}{m!} \left[- \int_a^x (t-x)^m dV(t) + \sum_{\mu=0}^v c_{\mu} (x_{\mu} - x)^m \right]$$

pour $x \in [x_v, x_{v+1}]$, $v = -1, 0, \dots, n$.

Cette fonction est polynomiale par segments. C'est ce que j'ai appelé autrefois une «fonction élémentaire» (d'ordre m) [3] et ce qu'on appelle aujourd'hui une fonction «spline».

Lorsque la fonction φ ne change pas de signe, de (4) on déduit, en appliquant la première formule de la moyenne du calcul intégral

$$(5) \quad R[f] = K \cdot \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \quad \text{où } a < \xi < b$$

avec

$$K = R[x^{m+1}] = (m+1)! \int_a^b \varphi(x) dx \quad (\neq 0).$$

3. La même représentation (4) du reste est valable pour des formules d'approximation plus générales que la formule de quadrature (3). Par exemple pour des formules de quadrature contenant au second membre aussi un certain nombre des valeurs sur les noeuds de quelques-unes des dérivées de la fonction f . On peut trouver de telles formules, avec l'expression de la forme (4) du reste, dans le travail cité de R. v. MISES [2].

Rappelons aussi les recherches de E. RÉMÈZ qui a étudié [6, 7] la représentation, sous la forme (4) ou sous une forme plus générale à l'aide d'une intégrale de Stieltjes, d'une fonctionnelle linéaire $R[f]$ de degré d'exactitude m et vérifiant certaines conditions de continuité. Ces formules s'obtiennent par l'application du théorème bien connu de F. RIESZ sur la représentation sous forme d'une intégrale d'une fonctionnelle linéaire.

Nous n'insisterons pas ici sur ces questions.

4. Une autre représentation de la fonctionnelle linéaire $R[f]$ s'obtient dans le cas de sa «simplicité».

La fonctionnelle linéaire $R[f]$ définie sur l'ensemble S , dont la structure a été précisée au n° 1 et ayant un degré d'exactitude m , est dite de la forme simple si on peut trouver $m+2$ points distincts ξ_v , $v = 1, 2, \dots, m+2$ de l'intervalle I de définition des éléments de S , dépendant en général de

la fonction f et une constante K , indépendante de la fonction f , tels que l'on ait

$$(6) \quad R[f] = K[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+2}; f].$$

Ici $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+2}; f]$ désigne la différence divisée (d'ordre $m+1$) de la fonction f sur les noeuds (distincts) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+2}$. D'ailleurs lorsque $m \geq 0$ on peut choisir les noeuds ξ_v à l'intérieur de l'intervalle I .

La constante K est égale à $R[x^{m+1}]$ et si, de plus, $m \geq 0$ et la dérivée $(m+1)^{\text{ième}} f^{(m+1)}(x)$ existe à l'intérieur de l'intervalle I , on a la formule (5).

Remarquons que si la dérivée $(m+1)^{\text{ième}} f^{(m+1)}(x)$ est bornée, donc si

$$|f^{(m+1)}(x)| \leq (m+1)! M$$

où M est un nombre réel indépendant de x , on déduit de (5) la délimitation

$$|R[f]| \leq |K| M.$$

Cette même délimitation est valable, si $R[f]$ est de la forme simple et M est le supremum de la valeur absolue de la différence divisée d'ordre $m+1$ de la fonction f . Pour que M soit fini il n'est pas nécessaire que la dérivée $(m+1)^{\text{ième}} f^{(m+1)}(x)$ existe. Il suffit que f ait une dérivée $m^{\text{ième}} f^{(m)}(x)$ vérifiant une condition de Lipschitz ordinaire.

5. Il résulte de l'analyse précédente que si la formule de quadrature (3) a le reste $R[f]$ de degré d'exactitude $m (\geq 1)$ et si la fonction f a une dérivée d'ordre $m+1$ sur l'intervalle $[a, b]$, la formule (5), avec $K = R[x^{m+1}]$, a lieu, ou bien si le «noyau» φ dans (4) ne change pas de signe ou bien si le reste $R[f]$ est de la forme simple. Pour montrer l'étroite liaison entre les deux propriétés qui assurent de cette manière l'existence de la formule (5) nous allons démontrer le

THÉORÈME. Pour que la fonctionnelle linéaire (4) définie sur l'ensemble des fonctions continues ayant une dérivée $(m+1)^{\text{ième}}$ continue sur l'intervalle borné $[a, b]$, soit de degré d'exactitude $m \geq 1$ et de la forme simple, il faut et il suffit que l'on ait

$$(7) \quad \int_a^b \varphi(x) dx \neq 0$$

et que la fonction φ , supposée continue, ne change pas de signe sur l'intervalle $[a, b]$.

6. Avant de passer à la démonstration de notre théorème, il faut rappeler quelques propriétés préliminaires.

Nous supposons toujours que l'ensemble S contient tous les polynômes et est défini comme au n° 1.

LEMME 1. Pour que la fonctionnelle linéaire $R[f]$, définie sur S et de degré d'exactitude m soit de la forme simple, il faut et il suffit que l'on ait $R[f] \neq 0$ pour toute fonction $f \in S$ convexe d'ordre m (sur l'intervalle I).

Pour la notion et les propriétés des fonctions convexes (non-concaves, non-convexes, concaves) d'ordre m et pour la démonstration du Lemme 1, on peut consulter mes travaux antérieurs. La fonction est dite convexe (non-concave, non-convexe, concave) d'ordre $m (\geq -1)$ si toutes ses diffé-

rences divisées d'ordre $m + 1$, sur des noeuds distincts (de l'intervalle I), sont positives (non-négatives, non-positives, négatives). Le lecteur peut consulter, en particulier, mes mémoires dans «Mathematica» [4, 5] où on peut trouver aussi divers critères de simplicité.

Remarquons que si $R[f] \neq 0$ pour toute fonction $f \in S$ convexe d'ordre m , le nombre $R[f]$ pour f convexe d'ordre m est ou bien toujours positif ou bien toujours négatif. Supposons, en effet, le contraire et soient f_1, f_2 deux fonctions convexes d'ordre m appartenant à S tel quel'on ait $R[f_1] > 0$, $R[f_2] < 0$. La fonction $f(x) = f_1(x) - \frac{R[f_1]}{R[f_2]} f_2(x)$ appartient à S , est convexe d'ordre m et vérifie l'égalité $R[f] = 0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Il en résulte le

LEMME 2. Si $R[f]$ est une fonctionnelle linéaire définie sur S , de degré d'exactitude m et si on peut trouver deux fonctions $f_1, f_2 \in S$ convexes d'ordre m telles que l'on ait $R[f_1] R[f_2] < 0$, alors elle n'est pas de la forme simple.

Démontrons aussi le

LEMME 3. $R[f]$ étant une fonctionnelle linéaire définie sur S , de degré d'exactitude m , si $f \in S$ est une fonction non-concave d'ordre m telle que $R[f] \neq 0$, alors on peut trouver une fonction $f^* \in S$ convexe d'ordre m telle que l'on ait $R[f] R[f^*] > 0$.

En effet, si ε est une constante positive, la fonction $f^*(x) = f(x) + \varepsilon x^{m+1}$ est convexe d'ordre m et nous avons

$$R[f^*] = R[f] + \varepsilon R[x^{m+1}] = R[f] \left\{ 1 + \varepsilon \frac{R[x^{m+1}]}{R[f]} \right\}.$$

Il suffit de prendre $\varepsilon < \left| \frac{R[f]}{R[x^{m+1}]} \right|$ pour déduire la propriété énoncée par le Lemme 3.

Enfin nous avons le

LEMME 4. $R[f]$ étant une fonctionnelle linéaire définie sur S , de degré d'exactitude m , si on peut trouver les fonctions $f_1, f_2 \in S$ non-concaves d'ordre m tel que l'on ait $R[f_1] R[f_2] < 0$, alors elle n'est pas de la forme simple.

Soient, en effet, $f_1^*, f_2^* \in S$ des fonctions convexes d'ordre m , tel que $R[f_1] R[f_1^*] > 0$, $R[f_2] R[f_2^*] > 0$, qui existent bien d'après le Lemme 3. Il en résulte alors $R[f_1^*] R[f_2^*] < 0$ et en applique ensuite le Lemme 2.

7. Après cette digression nous pouvons passer à la démonstration de notre théorème énoncé au n° 5.

La condition est nécessaire La nécessité de la relation (7) résulte de l'égalité

$$(8) \quad R[x^{m+1}] = (m+1)! \int_a^b \varphi(x) dx.$$

La fonction φ n'est pas nulle identiquement sur $[a, b]$. Soit donc $x_0 \in [a, b]$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Par suite de la continuité de φ il existe un sous-intervalle $[c, d]$ de $[a, b]$, de longueur non nulle (donc $a \leq c < d \leq b$), tel que $\text{sg } \varphi(x) =$

$= \text{sg } \varphi(x_0)$ pour $x \in [c, d]$. Considérons maintenant les fonctions

$$(9) \quad \varphi_{k,\lambda} = \left(\frac{|x - \lambda| + x - \lambda}{2} \right)^{k-1}$$

où k est un nombre entier > 1 . Nous avons alors

$$\varphi_{k,\lambda}^{(i)} = \frac{(k-1)!}{(k-i-1)!} \varphi_{k-i,\lambda}, \quad i = 0, 1, \dots, k-2.$$

La fonction

$$(10) \quad f = \frac{2}{(m+1)!} [\varphi_{m+3,c} - 2\varphi_{m+3,\frac{c+d}{2}} + \varphi_{m+3,d}]$$

est non-concave d'ordre m et a une dérivée $(m+1)^{\text{ième}}$ continue qui est égale à $|x - c| + |x - d| - 2 \left| x - \frac{c+d}{2} \right|$, donc positive sur l'intervalle ouvert (c, d) et nulle en dehors de cet intervalle. Pour la fonction (10) nous avons

$$R[f] = \int_c^d \varphi(x) f^{(m+1)}(x) dx$$

d'où il résulte que $\text{sg } R[f] = \text{sg } \varphi(x_0)$.

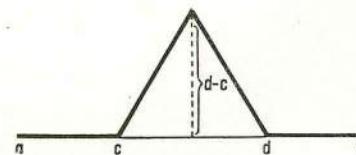


Fig. 1

Si la fonction φ change de signe sur $[a, b]$ on peut trouver deux points $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $\varphi(x_1) \varphi(x_2) < 0$, donc aussi deux fonctions f_1, f_2 non-concaves d'ordre m telles que $\text{sg } R[f_1] = \text{sg } \varphi(x_1)$, $\text{sg } R[f_2] = \text{sg } \varphi(x_2)$. Il en résulte que $R[f_1] R[f_2] < 0$. Par suite du Lemme 4, la fonctionnelle linéaire $R[f]$ n'est donc pas de la forme simple.

Dans le théorème, l'invariance du signe de la fonction φ est donc aussi nécessaire.

La condition est suffisante. La suffisance de la condition (7) résulte encore de la formule (8). Soit encore $[c, d]$ un sous-intervalle de longueur non nulle de $[a, b]$ ($a \leq c < d \leq b$) sur lequel φ est positif. Soit ensuite f une fonction convexe d'ordre m ayant une dérivée $(m+1)^{\text{ième}}$ continue sur $[a, b]$. On a alors $f^{(m+1)}(x) \geq 0$ pour $x \in [a, b]$. Mais $f^{(m+1)}$ ne peut être nul identiquement sur aucun sous-intervalle de longueur non nulle de $[a, b]$, car autrement f serait seulement non-concave et non pas convexe d'ordre m sur $[a, b]$. Il en résulte qu'il existe un $[c', d'] \subseteq [c, d]$, de longueur non nulle

($c \leq c' < d' \leq d$), sur lequel $f^{(m+1)}(x) > 0$. Nous avons alors

$$R[f] = \int_a^b \varphi(x) f^{(m+1)}(x) dx \geq \int_{c'}^{d'} \varphi(x) f^{(m+1)}(x) dx > 0$$

donc $R[f] > 0$.

Lorsque la fonction f est non-positive, on démontre, de la même manière que $R[f] < 0$, pour toute fonction convexe d'ordre m sur $[a, b]$.

La fonctionnelle linéaire (4) est bien de la forme simple.

Le théorème énoncé au n° 5 est ainsi démontré.

8. R. v. MISES a étudié [2] la représentation des restes $R[f]$ des formules de quadrature aussi sous la forme plus générale d'une intégrale de Stieltjes

$$R[f] = \int_a^b f^{(m+1)}(x) d\alpha(x)$$

où $\alpha(x)$ est une fonction à variation bornée sur l'intervalle borné $[a, b]$. On peut aussi étudier la simplicité d'une fonctionnelle linéaire de cette forme. Nous reviendrons sur cette question dans un autre travail.

Bibliographie

- [1] G. KOWALEWSKI, *Interpolation und genäherte Quadrature*, 1932.
- [2] R. MISES, Über allgemeine Quadraturformeln, *J. f. die reine u. angew. Math.* **174** (1936) 56-67.
- [3] T. POPOVICIU, Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX). *Bull. Math. Soc. Roumaine des sciences*, **43** (1942) 84-141.
- [4] T. POPOVICIU, Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse, *Mathematica* **1** (24) (1959) 95-142.
- [5] T. POPOVICIU, La simplicité du reste dans certaines formules de quadrature, *Mathematica*, **6** (29) (1964) 157-184.
- [6] E. RÉMÈZ, Sur certaines classes de fonctionnelles linéaires dans les espaces C_p et sur les termes complémentaires des formules d'analyse approximative I, *Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. URSS Ukraine* **3** (1940) 21-62.
- [7] E. RÉMÈZ, Sur certaines classes de fonctionnelles linéaires dans les espaces C_R et sur les termes complémentaires des formules d'analyse approximative II. *ibid.*, **4** (1940) 47-82.