

GÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ DES SUITES DE FAREY

PAR

TIBERIU POPOVICIU

(Cluj)

On établit une propriété des sommes des $v^{\text{ièmes}}$ termes, pour $v = 1, 2, \dots, k$ des suites croissantes de k nombres naturels, premiers entre eux et dont le dernier terme est égal à $n (n \geq k)$.

1. J. A. Blake a remarqué [1] que si nous considérons toutes les fractions ordinaires irréductibles, plus petites que 1 et dont le dénominateur est $\leq n$, la somme des dénominateurs est égale à 2 fois la somme des numérateurs. C'est une conséquence immédiate de la propriété que si nous considérons tous les couples ordonnés de nombres naturels (a, b) où $a < b = n$, les nombres a et b étant premiers entre eux, la somme $S_2(n)$ des secondes composantes b est égale à 2 fois la somme $S_1(n)$ des premières composantes a .

On a d'ailleurs, $S_2(n) = n\varphi(n)$ et $S_1(n) = \frac{1}{2}n\varphi(n)$ est égale à la somme des nombres naturels $\leq n$ et premiers avec n . On suppose bien entendu, que $n > 1$ et $\varphi(n)$ est la fonction bien connue d'Euler (l'« indicateur » de n).

I. Katz [2] et A. Zane [3] sont revenus sur le résultat précédent de J. A. Blake.

Dans la suite nous allons donner une généralisation de cette propriété.

2. Nous démontrerons le :

THÉORÈME. Soient k, n deux nombres naturels donnés, où $2 \leq k \leq n$ et considérons toutes les suites croissantes $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de k nombres naturels où : a). $a_k = n$, b). $a_1, a_2, \dots, a_k$ sont premiers entre eux. Désignons par $S_v(n)$ la somme des $v^{\text{ièmes}}$ termes a_v de toutes ces suites pour $v = 1, 2, \dots, k$.

Nous avons alors

$$(1) \quad S_v(n) = v S_1(n), \quad v = 1, 2, \dots, k.$$

Nous allons déduire la démonstration de ce théorème d'une propriété analogue des suites $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ dont les termes ne sont pas soumis à la restriction b) du texte. Nous allons donc démontrer le :

LEMME. Soient k, n deux nombres naturels donnés, où $2 \leq k \leq n$ et considérons toutes les suites croissantes $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de k nombres naturels $a_1, a_2, \dots, a_k$, dont le dernier terme est égal à n . Désignons par $A_v(n)$ la somme des $v^{\text{ièmes}}$ termes de toutes ces suites pour $v = 1, 2, \dots, k$. Nous avons alors

$$(2) \quad A_v(n) = v A_1(n), \quad v = 1, 2, \dots, k.$$

3. Passons à la démonstration du lemme. Nous pouvons calculer les sommes $A_v(n)$ par récurrence, mais on peut aussi les obtenir rapidement par l'emploi d'une certaine « fonction génératrice ». Considérons la fonction génératrice de k variables $x_1, x_2, \dots, x_k$, $F = F(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}$, la sommation étant étendue à toutes les suites croissantes $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de nombres naturels. Nous avons alors

$$(3) \quad F = \prod_{i=1}^k \frac{x_i x_{i+1} \dots x_k}{1 - x_i x_{i+1} \dots x_k}$$

Pour simplifier l'écriture désignons par $[f]$ la fonction d'une variable z qui s'obtient de la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, en posant $x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} = 1, x_k = z$. Nous avons alors

$$(4) \quad \left[\frac{\partial F}{\partial x_v} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} A_v(n) z^n$$

pour $v = 1, 2, \dots, k-1$ et

$$(5) \quad \left[\frac{\partial F}{\partial x_k} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} A_k(n) z^{n-1}.$$

Pour $n < v$, $v = 1, 2, \dots, k$ les coefficients $A_v(n)$ n'interviennent pas dans le lemme. Ils sont définis par les formules (4) et (5). Nous verrons d'ailleurs qu'ils sont tous nuls. Pour calculer les premiers membres des égalités (4) et (5) remarquons que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_v} \frac{x_i x_{i+1} \dots x_k}{1 - x_i x_{i+1} \dots x_k} \right] = \begin{cases} 0, & \text{pour } v < i \\ \frac{z}{(1-z)^2}, & \text{pour } k > v \geq i \\ \frac{1}{(1-z)^2}, & \text{pour } v = k \end{cases}$$

Donc, si nous appliquons la règle de la dérivation d'un produit, nous obtenons

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_v} \right] = v \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}, \quad v = 1, 2, \dots, k-1$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_k} \right] = k \frac{z^{k-1}}{(1-z)^{k+1}}.$$

Il en résulte immédiatement les formules (2) et le lemme est donc démontré. On obtient d'ailleurs facilement l'expression de $A_v(n)$ sous la forme

$$(6) \quad A_v(n) = v \binom{n}{k}, \quad v = 1, 2, \dots, k.$$

4. Nous allons maintenant démontrer le théorème énoncé. Désignons par $\mathfrak{M}(n)$ l'ensemble de toutes les suites de k nombres naturels qui interviennent dans le lemme et par $\mathfrak{M}_d(n)$ le sous-ensemble formé par les éléments de $\mathfrak{M}(n)$ dont les termes sont tous divisibles par le nombre d . Il est clair que d est un diviseur de n . On déduit l'ensemble $\mathfrak{M}_d(n)$ en multipliant par d chaque terme des éléments de $\mathfrak{M}\left(\frac{n}{d}\right)$. Il en résulte que l'ensemble $\mathfrak{M}_d(n)$ jouit de la même propriété que l'ensemble $\mathfrak{M}(n)$. Les sommes $A_v(n)$, $v = 1, 2, \dots, k$ correspondant à l'ensemble $\mathfrak{M}_d(n)$ sont égales à $d A_v\left(\frac{n}{d}\right)$, $v = 1, 2, \dots, k$ respectivement.

Pour obtenir les suites qui interviennent dans le théorème il faut supprimer de $\mathfrak{M}(n)$ les éléments (suites) dont les termes ne sont pas premiers entre eux. Désignons par $p_1, p_2, \dots, p_r$ (tous) les facteurs premiers (distincts) du nombre n . Les suites supprimées de $\mathfrak{M}(n)$ sont celles pour lesquelles le p.g.c.d. des termes est divisible par au moins l'un des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_r$. En appliquant le principe bien connu d'inclusion et d'exclusion, nous obtenons

$$(7) \quad S_v(n) = A_v(n) + \sum_{s=1}^r (-1)^s \sum_{(s)} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s} A_v\left(\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}}\right) \\ v = 1, 2, \dots, k$$

où la sommation $\sum_{(s)}$ est étendue à toutes les combinaisons $i_1, i_2, \dots, i_s$, s à s des indices $1, 2, \dots, r$.

Compte tenu de (2), les égalités (1) en résultent. Le théorème est donc démontré.

5. Des formules (6) nous déduisons aussi :

$$A_v(n) = v \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad v = 1, 2, \dots, k$$

où $\binom{n-1}{k-1}$ est précisément le nombre des éléments de $\mathfrak{M}(n)$. De même, si nous désignons par $N(n)$ le nombre des suites qui interviennent dans le théorème, nous avons

$$S_v(n) = v \frac{n}{k} N(n), \quad v = 1, 2, \dots, k.$$

Enfin, de la formule (7), pour $v = k$, nous déduisons

$$(8) \quad N(n) = \binom{n-1}{k-1} + \sum_{s=1}^r (-1)^s \sum_{(s)} \left(\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}} - 1 \right).$$

Pour $k = 2$ nous avons $N(n) = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est la fonction d'Euler (l'indicateur). Pour $k > 2$ la structure arithmétique du nombre $N(n)$, donc aussi des nombres $S_v(n)$, $v = 1, 2, \dots, k$ est plus compliquée. Désignons par C_k^v , $v = 0, 1, \dots, k-1$ les coefficients factoriels du rang k , définis par l'égalité polynomiale

$$(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) = C_k^0 x^{k-1} + C_k^1 x^{k-2} + \dots + C_k^{k-1}.$$

Considérons aussi les fonctions arithmétiques

$$\varphi_v(n) = n^v \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i^v} \right), \quad v = 1, 2, \dots$$

les p_i , $i = 1, 2, \dots, r$ étant toujours les facteurs premiers distincts de n . Pour $v = 1$ nous retrouvons la fonction d'Euler $\varphi_1(n) = \varphi(n)$. En général, $\varphi_v(n)$ est égal au nombre des suites de v nombres naturels dont les termes sont $\leq n$ et ont leur p. g.c.d. premier avec n .

Si nous remarquons que $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!}$, de la formule (8) nous déduisons

$$(9) \quad N(n) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{s=0}^{k-2} (-1)^s C_k^s \varphi_{k-1-s}(n).$$

6. Nous pouvons en tirer quelques conséquences et nous pouvons généraliser de plusieurs manières ce que nous avons démontré.

La propriété que nous examinons dans ce travail reste vraie pour l'ensemble des suites croissantes de nombres naturels premiers entre eux et dont le dernier terme est $\leq n$. Ceci résulte du fait que l'ensemble considéré est la réunion des ensembles $\mathfrak{M}(v)$, $v = k, k+1, \dots, n$ qui sont disjoints deux à deux. Si donc dans ce cas $S'_v(n)$ est la somme des $v^{\text{ièmes}}$ termes et $N'(n)$ le nombre des suites de l'ensemble considéré, ces fonctions arithmétiques sont les fonctions sommatoires des fonctions $S_v(n)$ et $N(n)$ respectivement. Nous avons donc

$$S'_v(n) = \sum_{i=1}^n S_v(i), \quad v = 1, 2, \dots, k, \quad N'(n) = \sum_{i=1}^n N(i)$$

où d'ailleurs les $S_v(i)$, $N(i)$ sont nuls pour $i < k$.

7. La propriété de l'énoncé du théorème est vraie aussi pour l'ensemble de toutes les suites non décroissantes de k nombres entiers non négatifs premiers entre eux et dont le dernier terme est égal à n . Si nous désignons dans ce cas par $S_v^*(n)$, $v = 1, 2, \dots, k$ et $N^*(n)$ les nombres correspondant à $S_v(n)$, $v = 1, 2, \dots, k$ et $N(n)$ respectivement, nous avons

$$S_v^*(n) = v S_1^*(n) = v \frac{n}{k} N^*(n), \quad v = 1, 2, \dots, k$$

et

$$(10) \quad N^*(n) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{s=0}^{k-2} C_k^s \varphi_{k-1-s}(n).$$

C'est une formule analogue à la formule (9).

On obtient ce résultat en établissant une propriété tout à fait analogue à celle de l'énoncé du lemme et relative à l'ensemble de toutes les suites non décroissantes de k nombres entiers dont le dernier terme est égal à n (les termes n'étant pas nécessairement premiers entre eux). Le nombre de ces suites est égal à $\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{(k-1)!}$.

Il n'est pas nécessaire de détailler la démonstration. Je me contenterais de dire que cette fois-ci il suffit de nous appuyer, au lieu de (3), sur la fonction génératrice

$$\prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - x_i x_{i+1} \dots x_k}.$$

On peut évidemment donner aussi une propriété analogue à la conséquence examinée au n° 6. Je propose au lecteur d'énoncer cette propriété.

Reçu le 3 août 1971

Institut de Calcul
Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. BLAKE, J. A., *Some characteristic properties of the Farey Series*. The Amer. Math. Monthly, 1966, **73**, 50-52.
2. KATZ, I., *Note on a theorem of Blake and Aron*. *ibid.*, 1967, **74**, 1233.
3. ZANE, A., *A comment on a precedent note on the Farey Series*. *ibid.*, 1967, **74**, 977.