DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Volume VI
Dedicated to Professor
Stanisław Gołąb
Part 2
1973

Tiberiu Popoviciu

SUR UNE FORMULE DE QUADRATURE DE S. GOŁĄB ET C. OLECH

Dédié à M. S. Gołąb à l'occasion
de son 70$^{\text{ième}}$ anniversaire

1. S. Gołąb et C. Olech ont démontré [1] qu'il existe un nombre Θ et un seul, compris strictement entre 0 et 1 $(0 < \Theta < 1)$, de manière que la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(\Theta) + \lambda_2 f(1) + R(f) \tag{1}$$

soit exacte pour les fonctions $(x^0 =)\ 1,\ x^p,\ x^q,\ x^r$, où p, q, r sont des nombres positifs quelconques tels que $p < q < r$. Le fait que la formule (1) est exacte pour les fonctions 1, x^p, x^q, x^r signifie que

$$R(1) = R(x^p) = R(x^q) = R(x^r) = 0. \tag{2}$$

Les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ sont indépendants de la fonction f et peuvent être calculés facilement à l'aide des égalités (2). Nous obtenons ainsi $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ et

$$\lambda_1 = \frac{q - p}{(p + 1)(q + 1)(\Theta^p - \Theta^q)}\ ; \tag{3a}$$

(3b) $$\lambda_2 = \frac{(p+1)\Theta^p - (q+1)\Theta^q}{(p+1)(q+1)(\Theta^p - \Theta^q)} .$$

Toute puissance réelle d'un nombre positif est un nombre positif bien déterminé. Les autres déterminations d'une telle puissance n'interviendront pas dans ce travail. On a $0^\sigma = 0$ si σ est positif. La fonction x^σ est donc définie, uniforme, continue et indéfiniment dérivable sur l'axe réel positif, pour tout exposant réel σ. Pour $\sigma = 0$ cette fonction se réduit à la constante 1. Si $\sigma > 0$ la fonction x est définie et continue pour $x \geq 0$.

Le nombre Θ est donné par l'équation

(4) $$(r-q)(p+1)\Theta^p + (p-r)(q+1)\Theta^q + (q-p)(r+1)\Theta^r = 0$$

qui, comme l'ont montré S. Gołąb et C. Olech [1], a exactement une racine et une seule dans l'intervalle ouvert]0,1[. Dans le travail cité de S. Gołąb et C. Olech on suppose que les exposants p, q, r sont des entiers (positifs). En suivant leur démonstration on peut voir facilement que cette restriction n'est pas nécessaire. Nous supposerons donc seulement que $0 < p < q < r$.

La formule (1) constitue une intéressante généralisation de la formule de Simpson. On obtient cette dernière en prenant $p = 1$, $q = 2$, $r = 3$.

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier le reste R(f) de la formule (1), sous des hypothèses bien déterminées faites sur la fonction f.

Auparavant nous allons établir quelques résultats qui présentant de l'intérêt par eux-mêmes peuvent être utilisés dans l'étude d'autres problèmes, analogues à celui traité dans ce travail.

2. Désignons par

(5) $$V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} = |g_t(x_i)|_{i,t=1,2,\ldots,n}$$

le déterminant d'ordre n des valeurs des fonctions g_t, $t = 1, 2, \ldots, n$ sur les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dans ce déterminant $g_t(x_i)$ est l'élément qui se trouve dans la i-ième ligne et la t-ième colonne.

Le déterminant (5) est évidemment nul si le points x_i ou si les fonctions g_t ne sont pas distincts.

Si les points x_i ne sont pas distincts, la notation (5) sera employée pour un déterminant convenablement modifié. Cette modification consiste dans le remplacement des lignes correspondantes à chaque groupe de points x_i confondus par des lignes formées par les valeurs des fonctions g_t et de leurs dérivées successives sur ces points. Ceci implique, bien entendu, l'existence des dérivées considérées. Plus exactement, soient $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les points distincts avec lesquels coincident respectivement $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $(k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 1)$ des points x_i. Alors pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$, il y a exactement k_i lignes constituées par les valeurs des fonctions g_t et de leurs $k_i - 1$ premières dérivées sur le point z_i.

Nous continuons de désigner par

(6) $$V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

le déterminant ainsi modifié. Mais il est important de préciser alors la succession des lignes du déterminant ainsi défini et qui est bien d'ordre $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Nous désignerons par (6) le déterminant d'ordre n dont les $(k_1 + k_2 + \ldots + k_{i-1} + j)^{\text{ièmes}}$ lignes, pour les valeurs consécutives $1, 2, \ldots, k_i$ de j, prises dans cet ordre, sont les suivantes

$$(7)\quad \begin{cases} g_1(z_i) & g_2(z_i) & \dots & g_n(z_i) \\ g_1'(z_i) & g_2'(z_i) & \dots & g_n'(z_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1^{(k_i-1)}(z_i) & g_2^{(k_i-1)}(z_i) & \dots & g_n^{(k_i-1)}(z_i). \end{cases}$$

La somme $k_1 + k_2 + \dots + k_{i-1}$ est remplacée par 0 pour $i = 1$ et les accents désignent des dérivations successives.

Les lignes (7) sont des lignes consécutives dans le déterminant (6). Avec cette convention la succession des colonnes et des lignes est bien précisée dans le déterminant (6).

Bien entendu, le déterminant modifié (6) est bien défini même si les points $z_1, z_2, \dots, z_m$ ne sont pas distincts, mais alors il est évidemment égal à 0.

Tout revient, en somme, à poser

$$(8)\quad x_{k_1+k_2+\dots+k_{i-1}+j} = z_i,\ j = 1,2,\dots,k_i,\ i = 1,2,\dots,m.$$

Il est important de remarquer qu'alors on ne peut pas soumettre, en général, les lignes du déterminant à une permutation quelconque, puisque l'ordre de ces lignes à été fixé d'avance. Nous voulons dire par cela que, pour prendre un exemple, tandis que le déterminant $V\begin{pmatrix} g_1, & g_2, & g_3 \\ z_1, & z_1, & z_2 \end{pmatrix}$ est toujours défini, le symbole $V\begin{pmatrix} g_1, & g_2, & g_3 \\ z_1, & z_2, & z_1 \end{pmatrix}$ ne signifie rien si $z_1 \neq z_2$.

Au contraire, nous pouvons soumettre les lignes du déterminant à une permutation par groupe de points confondus, ce qui revient, en somme, à une permutation des points z_i. Plus exactement, soit $v_1, v_2, \dots, v_n$ une permutation des indices $1, 2, \dots, n$. Posons alors, pour simplifier les notations, $x_i' = x_{v_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Le déterminant (6), avec les lignes correspondantes permutées, est alors

$$(9)\quad V\begin{pmatrix} g_1, & g_2, & \dots, & g_n \\ x_1', & x_2', & \dots, & x_n' \end{pmatrix}$$

la succession des lignes pour un groupe de points x_i' égaux avec un z_i étant respectée conformément à la règle décrite par le tableau (7). Ceci signifie que nous considérons seulement les permutations $v_1, v_2, \dots, v_n$ pour lesquelles nous avons

$$(10)\quad x'_{k_1'+k_2'+\dots+k_{i-1}'+j} = z_i',\ j = 1,2,\dots,k_i',\ i = 1,2,\dots,m$$

la suite $z_1', z_2', \dots, z_m'$ étant une permutation de la suite $z_1, z_2, \dots, z_m$. La valeur du déterminant (9) diffère de celle de (6) au plus par le signe, d'après la formule (17) qui sera établie plus loin.

Signalons dès maintenant les cas particuliers suivants:

1°. Pour les fonctions $g_t = x^{t-1}$, $t = 1,2,\dots,n$, le déterminant (5) se réduit au déterminant de Vandermonde $V(x_1,x_2,\dots,x_n)$ des nombres $x_1,x_2,\dots,x_n$. Nous avons donc

$$(11)\quad V\begin{pmatrix} 1, & x, & \dots, & x^{n-1} \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n \end{pmatrix} = V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i<j}^{1,2,\dots,n} (x_j - x_i), \quad (V(x_1) = 1).$$

2°. Dans le cas où tous les points x_i coincident (avec x) le déterminant modifié (6) se réduit au wronskien $W(g_1,g_2,\dots,g_n)(x)$ des fonctions g_t *). On peut donc écrire

*) C'est la raison pour laquelle nous appelons quelquefois le déterminant (5) le préwronskien des fonctions g_t.

$$(12) \qquad V\begin{pmatrix} g_1, & g_2, & \ldots, & g_n \\ x, & x, & \ldots, & x \end{pmatrix} = W(g_1, g_2, \ldots, g_n)(x).$$

3. On peut également obtenir le déterminant modifié (6) par un passage à la limite convenable. Pour ne pas compliquer les choses, nous supposerons que toutes les dérivées qui interviennent existent et sont continues, tout au moins dans certains voisinages des points z_i.

Soient alors n points distincts $x_j^{(i)}$, $j = 1, 2, \ldots, k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, et considérons le déterminant D d'ordre n $(= k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$ dont l'élement de la $(k_1 + k_2 + \ldots + \ldots + k_{i-1} + j)^{\text{ième}}$ ligne et la $t^{\text{ième}}$ colonne est la différence divisée habituelle $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_j^{(i)}; g_t]$ de la fonction g_t sur les noeuds $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_j^{(i)}$ et où $j = 1, 2, \ldots, k_i$, $t = 1, 2, \ldots, n$. Si nous remarquons que cette différence divisée tend vers $\frac{1}{(j-1)!} g_t^{(j-1)}(z_i)$ lorsque les points $x_v^{(i)}$, $v = 1, 2, \ldots, j$, tendent vers z_i, nous voyons que le déterminant D tend vers le déterminant modifié (6) divisé par le nombre $\prod_{i=1}^{m} (k_i - 1)!!$ lorsque $x_v^{(i)} \longrightarrow z_i$, $v = 1, 2, \ldots, k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Nous employons la notation abrégée $\alpha!! = 1!\ 2! \ldots\ \alpha!$ $(0!! = 1)$.

Enfin, si nous multiplions le déterminant D par le produit

$$(13) \qquad \prod_{i=1}^{m} V(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{k_i}^{(i)})$$

et si nous faisons quelques opérations élémentaires sur les lignes, nous obtenons le déterminant

$$(14) \quad V\begin{pmatrix} & & & & g_1, g_2, \ldots, g_n & & & & \\ x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{k_1}^{(1)}, & & x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{k_2}^{(2)}, & & \ldots, & & x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)} \end{pmatrix}$$

Il en résulte que le déterminant (6) s'obtient en multipliant (14) par $\prod_{i=1}^{m} (k_i - 1)!!$, en le divisant par (13) et en faisant ensuite tendre les points $x_j^{(i)}$ vers z_i, pour $j = 1, 2, \ldots, k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

La notion de différence divisée est bien connue. Nous l'employerons sous sa forme générale exposée dans le mémoire cité plus loin à propos de l'étude du reste de la formule (1) [5]. Les différences divisées habituelles sont celles par rapport aux puissances entières nonnégatives successsives $1, x, x^2, \ldots$ de la variable.

4. Comme une première application, nous trouverons la formule donnant la valeur du déterminant de Vandermonde généralisé

$$(15) \qquad V\begin{pmatrix} 1, & x, & \ldots, & x^{n-1} \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} = V(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{1,2,\ldots,m} (k_i - 1)!! \prod_{i<j}^{1,2,\ldots,m} (z_j - z_i)^{k_i k_j}$$

en usant des notations (8). En particulier, nous avons

$$V(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{m}) = W(1, x, \ldots, x^{n-1})(x) = (n-1)!!$$

En revenant à la valeur du déterminant (9), égal à (6) ou à son opposé, nous pouvons écrire

$$(16) \qquad \operatorname{sg} V\begin{pmatrix} g_1, & g_2, & \ldots, & g_n \\ x_1', & x_2', & \ldots, & x_n' \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{sg}\left(V(x_1', x_2', \ldots, x_n')\, V\begin{pmatrix} g_1, & g_2, & \ldots, & g_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix}\right)$$

$x_1', x_2', \dots, x_n'$ étant une permutation admissible de la suite $x_1, x_2, \dots, x_n$, en supposant que $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$ et où nous employons la fonction

$$\mathrm{sg}\, x = \begin{cases} 1, & \text{pour } x > 0, \\ 0, & \text{pour } x = 0, \\ -1, & \text{pour } x < 0, \end{cases}$$

qui satisfait à l'équation fonctionnelle $\mathrm{sg}\,(xy) = \mathrm{sg}\, x \cdot \mathrm{sg}\, y$ pour x et y réels quelconques.

En tenant compte de (15) et (16) nous obtenons aussi

$$(17) \qquad \mathrm{sg}\, V\begin{pmatrix} g_1, & g_2, & \dots, & g_n \\ x_1', & x_2', & \dots, & x_n' \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{sg}\left(\prod_{i<j}^{1,2,\dots,m} (z_j' - z_i')^{k_i' k_j'}\, V\begin{pmatrix} g_1, & g_2, & \dots, & g_n \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n \end{pmatrix} \right)$$

en employant les notations (10) et en supposant que $z_1 < z_2 < \dots < z_m$.

Remarquons en passant, que si parmi les nombres $k_1, k_2, \dots, k_m$ il y a au plus un qui est impair, le déterminant (9) ne dépend pas de la permutation admissible $x_1', x_2', \dots, x_n'$ de la suite $x_1, x_2, \dots, x_n$.

5. Nous allons établir maintenant une formule qui permet de réduire le calcul d'un déterminant de la forme (6) d'ordre n au calcul d'un déterminant de la même forme mais d'ordre $n-1$.

Modifions les lignes du déterminant (6) de la manière suivante: Reprenons le tableau (7). La formule de Leibniz

$$g_t^{(u)} = \left(\frac{g_t}{g_1}\, g_1\right)^{(u)} = \left(\frac{g_t}{g_1}\right)^{(u)} g_1 + \sum_{v=1}^{u} \binom{u}{v} \left(\frac{g_t}{g_1}\right)^{(u-v)} g_1^{(v)}$$

$$(v = 1, 2, \dots, k-1, \quad t = 1, 2, \dots, n)$$

nous montre que, sans modifier la valeur du déterminant (6),

les $k_i - 1$ dernières lignes du tableau (7) peuvent être remplacées respectivement par

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} g_1 h_1' & g_1 h_2' & \dots & g_1 h_n' \\ g_1 h_1'' & g_1 h_2'' & \dots & g_1 h_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1 h_1^{(k_i-1)} & g_1 h_2^{(k_i-1)} & \dots & g_1 h_n^{(k_i-1)} \end{array} \right.$$

où $h_t = g_t / g_1$, $t = 1, 2, \dots, n$, les fonctions et les dérivées de divers ordres étant calculées au point z_i. Si $k_i = 1$ on ne fait aucune modification de cette sorte sur le tableau (7). Remarquons que les éléments de la première colonne du tableau (18) sont tous nuls.

Ces résultats ont été obtenus en nous basant sur le fait qu'un déterminant ne change pas de valeur lorsqu'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire quelconque d'autres lignes.

Après ces opérations les lignes restées inaltérées forment le tableau

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} g_1(z_1) & g_2(z_1) & \dots & g_n(z_1) \\ g_1(z_2) & g_2(z_2) & \dots & g_n(z_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1(z_m) & g_2(z_m) & \dots & g_n(z_m). \end{array} \right.$$

Ces lignes gardent leurs places dans le déterminant (6). Toujours sans changer la valeur du déterminant (6), on peut retrancher la $(i-1)^{\text{ième}}$ ligne multipliée par $\frac{g_1(z_i)}{g_1(z_{i-1})}$ de la $i^{\text{ème}}$ ligne et ceci pour $i = 1, 2, \dots, m$. Les éléments du tableau (19) ainsi transformé s'obtiennent par l'application de la formule (Newton-Leibniz)

$$g_t(z_i) - g_t(z_{i-1}) \frac{g_1(z_i)}{g_1(z_{i-1})} = g_1(z_i) \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\frac{g_t(y)}{g_1(y)}\right)' dy.$$

Lorsque $m = 1$ le tableau (19) a une seule ligne qu'on laisse inchangée.

Après toutes ces transformations les éléments de la première colonne du déterminant (6) deviennent tous nuls, sauf le premier qui est égal à $g_1(z_1)$. Enfin, en sortant le facteur $\prod_{i=1}^{m}(g_1(z_i))^{k_i} = \prod_{i=1}^{n} g_1(x_i)$ et en développant le déterminant d'après la première colonne, on obtient la formule

$$V\begin{pmatrix} g_1, & g_2, & \ldots, & g_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} = \tag{20}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} g_1(x_i)\right) \int_{z_1}^{z_2}\int_{z_2}^{z_3} \cdots \int_{z_{m-1}}^{z_m} \psi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})\, dy_1 dy_2 \ldots dy_{m-1}$$

où

$$\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}) = \tag{21}$$

$$= V\begin{pmatrix} & & (g_2/g_1)', (g_3/g_1)', \ldots, (g_n/g_1)' & & \\ \underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{k_1 - 1}, & y_1, & \underbrace{z_2, z_2, \ldots, z_2}_{k_2 - 1}, & y_2, \ldots, y_{m-1}, & \underbrace{z_m, z_m, \ldots, z_m}_{k_m - 1} \end{pmatrix}.$$

C'est la formule que nous voulions établir. Nous avons encore employé les notations (8).

Nous supposons, bien entendu, que toutes les fonctions, dérivées et intégrales qui interviennent ont un sens. En particulier, par exemple, que la fonction g_1 ne s'annule pas, que la fonction $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$ est continue, etc.

Si $k_i = 1$ le point z_i ne figure pas au second membre de (21). Enfin, si $m = 1$ la formule (20) n'a pas de sens. Dans ce cas elle est remplacée par la formule bien connue [2]:

$$W(g_1, g_2, \ldots, g_n) = g_1^n\, W\left(\left(\frac{g_2}{g_1}\right)', \left(\frac{g_3}{g_1}\right)', \ldots, \left(\frac{g_n}{g_1}\right)'\right). \tag{22}$$

La formule (20) doit donc être regardée comme la généralisation de cette dernière formule (22).

6. Toutes les hypothèses concernant la continuité, la dérivabilité, l'intégrabilité, etc., des fonctions qui interviennent sont vérifiées si nous appliqueons les résultats précédents aux fonctions $g_t(x) = x^{\sigma_t}$, $t = 1, 2, \ldots, n$, définies pour $x > 0$, les σ_t étant des nombres réels donnés quelconques. Si nous remarquons que, dans ce cas,

$$\left(\frac{g_t(x)}{g_1(x)}\right)' = (\sigma_t - \sigma_1)x^{\sigma_t - \sigma_1 - 1}, \quad t = 1, 2, \ldots, n,$$

la formule (20) devient $(m > 1)$

$$V\begin{pmatrix} x^{\sigma_1}, & x^{\sigma_2}, & \ldots, & x^{\sigma_n} \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} = \tag{23}$$

$$= (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) \ldots (\sigma_n - \sigma_1)(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\sigma_1} \times$$

$$\times \int_{z_1}^{z_2}\int_{z_2}^{z_3} \cdots \int_{z_{m-1}}^{z_m} \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{m-1}$$

où

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}) =$$

$$= V\begin{pmatrix} x^{\sigma_2 - \sigma_1 - 1}, & x^{\sigma_3 - \sigma_1 - 1}, & \ldots, & x^{\sigma_n - \sigma_1 - 1} \\ \underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{k_1 - 1}, y_1, & \underbrace{z_2, z_2, \ldots, z_2}_{k_2 - 1}, & y_2, \ldots, y_{m-1}, & \underbrace{z_m, z_m, \ldots, z_m}_{k_m - 1} \end{pmatrix}$$

De cette formule nous déduisons le

T h é o r è m e 1. Avec les notations précédentes, si $0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_m$ et $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n$, le déterminant

$$V\begin{pmatrix} x^{\sigma_1}, & x^{\sigma_2}, & \ldots, & x^{\sigma_n} \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} \tag{24}$$

est positif.

La démonstration ne présent pas de difficultés et est principalement basée sur la formule (23). On peut procéder par induction complète. Remarquons d'abord que la propriété est vraie pour $n = 1$ car alors le déterminant (24) se réduit à $x_1^{\sigma_1}$ qui est bien un nombre positif. Remarquons aussi que pour $m = 1$ (n quelconque) la propriété est vraie puisqu'alors on a

$$(25)\quad V\begin{pmatrix} x^{\sigma_1}, & x^{\sigma_2}, & \dots, & x^{\sigma_n} \\ x_1, & x_1, & \dots, & x_1 \end{pmatrix} = W(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \dots, x^{\sigma_n})(x_1) =$$

$$= V(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)\, x_1^{\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_n-\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour le déterminant d'ordre $n-1$ ($n>1$) et démontrons-la pour le déterminant d'ordre n. On peut supposer $m>1$. La propriété résulte alors de la formule (23) dans laquelle on a

$$z_1 \leq y_1 \leq z_2 \leq \dots \leq y_{m-1} \leq z_m$$

et la fonction à intégrer est continue sur tout son domaine de définition $[z_1,z_2] \times [z_2,z_3] \times \dots \times [z_{m-1},z_m]$ et est (par hypothèse) positive sur tout point intérieur de ce domaine.

Si maintenant nous tenons compte de la formule générale (16), nous déduisons le

C o r o l l a i r e 1. Si les nombres x_i, $i = 1,2,\dots,n$ sont positifs, nous avons

$$(26)\quad \operatorname{sg} V\begin{pmatrix} x^{\sigma_1}, & x^{\sigma_2}, & \dots, & x^{\sigma_n} \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{sg}\left(V(x_1, x_2, \dots, x_n)\, V^{*}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)\right)$$

les z_i et les k_i étant toujours déterminés par les formules (8).

Dans le second membre $V(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est le déterminant de Vandermonde généralisé (15), mais $V^{*}(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ est le déterminant de Vandermonde habituel des nombres $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$, différents ou non, donné par la formule (11). La formule (26) est vraie aussi dans le cas où les σ_t ne sont pas tous distincts, puisqu'alors les deux membres sont égaux à 0.

Le cas particulier $m = n$, donc le cas où les points x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, sont distincts, a été traité par nous aussi dans un travail plus ancien [3].

7. Nous pouvons maintenant revenir à l'étude du reste de la formule de quadrature (1). Nous allons pour cela utiliser nos résultats concernant les fonctions convexes généralisées et la notion de fonctionnelle linéaire de la forme simple, exposé dans notre travail cité [5]. Le lecteur est prié de se reporter à ce travail pour la justification de toutes les affirmations qui vont suivre.

La formule (1) peut être obtenue en remplacant la fonction f par le polynome (généralisé) du type Lagrange-Hermite

$$L(x) = c_0 + c_1 x^p + c_2 x^q + c_3 x^r$$

dont les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 sont bien déterminés par les conditions interpolatoires

$$(27)\quad L(0) = f(0),\ L(\theta) = f(\theta),\ L'(\theta) = f'(\theta),\ L(1) = f(1).$$

Les nombres p, q, r et θ ont les significations données au nr. 1.

Il en résulte que le reste R(f) est donné par la formule

$$(28)\qquad R(f) = \int_0^1 (f(x) - L(x))dx.$$

Mais, il est facil de mettre la différence $f(x) - L(x)$

sous une forme remarquable à l'aide de la différence divisée généralisée

$$(29)\qquad [x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5;\ f] =$$

$$= V\begin{pmatrix} 1, x^p, x^q, x^r, f \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{pmatrix} : V\begin{pmatrix} 1, x^p, x^q, x^r, x^s \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{pmatrix}$$

où s est un nombre positif $> r$ $(> q > p)$.

On voit que, en vertu du corollaire 1, cette différence divisée existe quels que soient les points x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, non-négatifs, mais dont au plus un est égal à 0. Les deux déterminants du second membre de (29) sont pris dans le sens généralisé (9) (avec les z_i distincts). Remarquons que si $x_1 = 0$ et les points x_2, x_3, x_4, x_5 sont positifs, nous avons *)

$$V\begin{pmatrix} 1, x^p, x^q, x^r, x^s \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} x^p, x^q, x^r, x^s \\ x_2, x_3, x_4, x_5 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors

$$(30)\qquad f(x) - L(x) = \frac{V\begin{pmatrix} 1, x^p, x^q, x^r, x^s \\ 0, \theta, \theta, 1, x \end{pmatrix}}{V\begin{pmatrix} 1, x^p, x^q, x^r \\ 0, \theta, \theta, 1 \end{pmatrix}} [0, \theta, \theta, 1, x; f]$$

en supposant que x soit positif et différent de θ et de 1. Dans nôtre exemple x seul est toujours un groupe de points z_i. De cette manière le déterminant $V\begin{pmatrix} 1, x^p, x^q, x^r, x^s \\ 0, \theta, \theta, 1, x \end{pmatrix}$

*) Lorsque au moins deux des points x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sont égaux à 0, la différence divisée (29) (au moins pour $p \leq 1$) n'est pas définie.

est nul si x coincide avec 0, ou 1 et alors la différence divisée $[0, \theta, \theta, 1, x; f]$ n'est pas définie. On peut facilement rémédier à cette difficulté, mais il est inutile de la faire dans ce travail. Pour $x = 0, \theta$ ou 1 le second membre de (30) n'a pas de sens, mais alors les valeurs de polynome L sont données par (27).

8. Le coefficient de la différence divisée du second membre de (30) est, en vertu du corollaire 3, négative sur tout point de $[0, 1]$, en dehors de 0, θ et 1.

Rappelons maintenant que la fonction f est dite convexe par rapport à la suite des fonctions $1, x^p, x^q, x^r, x^s$ sur l'intervalle $[0, 1]$ si la différence divisée (29) est > 0 pour tout groupe de 5 points distincts x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Dans ce cas la différence divisée (29) est encore positive si les points x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ne sont pas tous confondus, au moins au cas où cette différence divisée existe. Au cas (le seul qui nous interesse ici) où la fonction f est convexe nous avons $[0, \theta, \theta, 1, x; f] > 0$ pour x différent de 0, θ et 1. Si $f \in C[0,1]$, donc si la fonction f est continue sur $[0,1]$, il résulte des formules (28) et (30) que si de plus la fonction est convexe par rapport à la suite $1, x^p, x^q, x^r, x^s$ nous avons $R(f) \neq 0$ (plus exactement $R(f) < 0$).

Mais $R(f)$ est une fonctionnelle linéaire (additive et homogène) définie sur $C[0,1]$. Il en résulte alors de l'étude que nous avons faite sur les fonctionnelles linéaires de la forme simple (voir toujours le travail [5]) le

T h é o r è m e 2. Si $f \in C[0,1]$, le reste $R(f)$ de la formule de quadrature (1) est de la forme

$$(31)\qquad R(f) = R(x^s)\,[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5; f]$$

où $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ sont 5 points distincts de l'intervalle ouvert $[0,1]$ (dépendant en général de la fonction f) et où la différence divisée du second membre est définie par la formule (29).

Le coeeficient

$$R(x^s) = \int_0^1 x^s\,dx - \lambda_1 \Theta^s - \lambda_2$$

de la formule (31) peut se calculer à l'aide des valeurs (3a) et (3b) des coefficients λ_1, λ_2 de la formule (1). Nous obtenons

$$(32)\quad R(x^s) = \frac{(p+1)(q-s)\Theta^p + (q+1)(s-p)\Theta^q + (s+1)(p-q)\Theta^s}{(p+1)(q+1)(s+1)(\Theta^p - \Theta^q)}$$

où $\Theta \in \,]0,1[$ satisfait à l'équation (4).

En apparence, dans la démonstration du théorème 2, en dehors de la continuité de la fonction f intervient aussi sa dérivabilité, tout au moins sur le point Θ. Mais ce théorème reste vrai sans cette dernière restriction. Ceci résulte, d'une part, du fait que dans la formule (1) la dérivée de la fonction f ne figure pas et, d'autre part, du fait qu'une fonction convexe par rapport à la suite $1, x^p, x^q, x^r, x^s$ sur l'intervalle $[0,1]$ est nécessairement (continue et) dérivable sur $]0,1[$. Nous avons établi cette dernière propriété autrefois [4].

9. La formule (31) est peu commode pour la délimitation du reste $R(f)$. Mais, il résulte encore de nôtre travail cité [5], que si la fonction f a une dérivée $4^{\text{ième}}$ sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ on peut dans (31) prendre les points $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ égaux à un même point $\xi \in \,]0,1[$.

Les formules (12), (22) et (25) nous donnent

$$V\begin{pmatrix} 1, & x^p, & x^q, & x^r, & f \\ \xi, & \xi, & \xi, & \xi, & \xi \end{pmatrix} = pqr\, W(x^{p-1}, x^{q-1}, x^{r-1}, f')(\xi)$$

$$V\begin{pmatrix} 1, & x^p, & x^q, & x^r, & x^s \\ \xi, & \xi, & \xi, & \xi, & \xi \end{pmatrix} = \xi^{p+q+r+s-10}\, pqrs\, V(p, q, r, s)$$

en supposant $\xi \in \,]0,1[$.

En faisant les calculs, nous trouverons

$$W(x^{p-1}, x^{q-1}, x^{r-1}, f')(\xi) =$$

$$= \xi^{p+q+r-9}\, V(p,q,r)\Big\{\xi^3 f^{IV}(\xi) - (p+q+r-6)\xi^2 f'''(\xi) +$$

$$+ \big[(p-1)(q-2)+(p-1)(r-1)+(q-2)(r-2)\big]\xi f''(\xi) +$$

$$- (p-1)(q-1)(r-1)f'(\xi)\Big\}$$

et nous déduisons donc la

Théorème 3. Si la fonction $f \in C[0,1]$ a une dérivée quatrième sur $]0,1[$, le reste $R(f)$ de la formule (1) est donné par

$$R(f) = \frac{R(x^s)^{1-s}}{s(s-p)(s-q)(s-r)}\Big\{\xi^3 f^{IV}(\xi) \mp$$

$$- (p+q+r-6)\xi^2 f'''(\xi) +$$

$$+ \big[(p-1)(q-2)+(p-1)(r-1)+(q-2)(r-2)\big]\xi f''(\xi) +$$

$$- (p-1)(q-1)(r-1)f'(\xi)\Big\}$$

où ξ est un point de l'intervalle ouvert $]0,1[$ (dépendant en général de la fonction f).

10. Nous finirons par deux exemples.

Exemple 1. Dans la formule de Simpson ($p = 1$, $q = 2$, $r = 3$), le reste est donné par la formule

$$R(f) = \frac{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{3\cdot 2^{s-1}} - \frac{1}{6}}{s(s-1)(s-2)(s-3)}\,\xi^{4-s} f^{IV}(\xi) \qquad (\xi \in \,]0,1[)$$

où $s > 3$.

Si nous prenons $s = 4$ nous retrouvons le reste bien connu $-\frac{1}{2880}f^{IV}(\xi)$. En prenant $s = \frac{7}{2}$ respectivement $s = 5$ nous trouvons le reste respectivement sous la forme

$$-\frac{4(\sqrt{2}-1)^2}{945\cdot\sqrt{2}}\sqrt{\xi}\, f^{IV}(\xi),\ -\frac{1}{5760}\,\frac{f^{IV}(\xi)}{\xi} \qquad (\xi \in]0,1[)$$

E x e m p l e 2. Prenons $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$, $r = \frac{3}{2}$. L'équation donne alors $\Theta = \frac{9}{25}$ et la formule (32) nous montre que le reste de la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{36}\left[2f(0) + 25f\left(\frac{9}{25}\right) + 9f(1)\right] + R(f)$$

est donné par la formule

$$R(f) = \frac{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{36}\left[25\left(\frac{3}{5}\right)^{2s} + 9\right]}{s(2s-1)(s-1)(2s-3)}\,\xi^{2-s}\left[3f''(\xi) + 12\,\xi f'''(\xi) + 4\xi^2 f^{IV}(\xi)\right]$$

où $\xi \in]0,1[$ et s étant un nombre $> \frac{3}{2}$. En prenant $s = 2$ le reste s'écrit

$$R(f) = -\frac{1}{300}\left[3f''(\xi) + 12\xi f'''(\Theta) + 4\xi^2 f^{IV}(\xi)\right].$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. G o ł ą b, C. O l e c h: Contribution à la thèorie de la formule simpsonienne des quadratures approchées. Ann. Polon. Math. 1 (1954) 176-183.

[2] G. P o l y a, G. S z e g ö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II. Berlin 1925.

[3] T. P o p o v i c i u: Asupra unui determinant. Gaz. Mat. Ser. A. 36 (1931) 405-408 (en roumain).

[4] T. P o p o v i c i u: Notes sur les fonctions d'ordre supérieur I. Mathematica (Cluj) 12 (1936) 81-92.

[5] T. P o p o v i c i u: Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse. Mathematica (Cluj) 24 (1959) 95-142.

INSTITUTUL DE CALCUL, Str. Republicii nr. 37, CLUJ, ROUMANIE