

SUR LE RESTE DANS LA FORMULE DE QUADRATURE D'EVERETT

Par

T. POPOVICIU (Cluj)

Dédié à M. G. ALEXITS à l'occasion de son 70^e anniversaire

1. Dans son mémoire sur les formules de quadrature, R. v. MISES [5] appelle formule de quadrature d'Everett, la formule sommatoire

$$(1) \quad \int_0^n f(x) dx = \sum_{\alpha=0}^n f(\alpha) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} d_\alpha [f(\alpha) + f(n-\alpha)] + R_n[f]$$

où m est un nombre naturel, n un nombre entier nonnégatif, les coefficients d_α , indépendants de la fonction $f(x)$, étant déterminés de manière que le reste $R_n[f]$ soit de degré d'exactitude $\geq m$, donc qu'il s'annule pour tout polynôme de degré m .

Nous nous proposons de trouver une expression du reste $R_n[f]$ en faisant les hypothèses suivantes:

H. 1. m est impair.

H. 2. La fonction $f(x)$ est continue sur un intervalle I de l'axe réel contenant les points $0, 1, \dots, n$ et $\alpha, n-\alpha, \alpha=1, 2, \dots, m-1$.

Le reste $R_n[f]$ est une fonctionnelle linéaire (additive et homogène) et pour trouver son expression désirée nous allons rappeler la définition de la simplicité d'une telle fonctionnelle.

2. Considérons une fonctionnelle linéaire (donc additive et homogène) $R[f]$, définie sur un ensemble linéaire S de fonctions (réelles et) continues $f(x)$ définies sur un intervalle donné I (de longueur non nulle) de l'axe réel. Nous supposons toujours que S contient tous les polynômes. Lorsqu'il est nécessaire on peut encore préciser la structure de l'ensemble S .

Le degré d'exactitude de $R[f]$ (s'il existe) est l'entier $m \geq -1$ qui jouit de la propriété

$$(2) \quad \begin{cases} R[1] \neq 0 & \text{si } m = -1, \\ R[1] = R[x] = \dots = R[x^m] = 0, R[x^{m+1}] \neq 0 & \text{si } m \geq 0. \end{cases}$$

Le degré d'exactitude, s'il existe, est bien déterminé. Lorsque seules les égalités (2) sont vérifiées ($m \geq 0$) nous dirons que $R[f]$ est de degré d'exactitude au moins m (ou que son degré d'exactitude est $\geq m$). Ceci est équivalent au fait que la fonctionnelle linéaire $R[f]$ s'annule sur tout polynôme de degré m . Pour que le degré d'exactitude soit égal à m , il faut et il suffit que $R[f]$ soit de plus différent de zéro sur un polynôme de degré $m+1$ au moins.

Rappelons la définition suivante de la simplicité de la fonctionnelle linéaire $R[f]$:

La fonctionnelle linéaire $R[f]$ est dite de la forme simple s'il existe un entier $m \geq -1$, indépendant de la fonction $f(x)$, tel que l'on ait, pour $f(x) \in S$,

$$(3) \quad R[f] = K \cdot [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+2}; f]$$

où ξ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, m+2$ sont $m+2$ points distincts de l'intervalle I , dépendant en général de la fonction $f(x)$ et K est une constante différente de zéro, indépendante de la fonction $f(x)$.

Le nombre m est complètement déterminé et il est précisément le degré d'exactitude de $R[f]$.

On a aussi $K = R[x^{m+1}] = R[x^{m+1} + P] (\neq 0)$ où $P(x)$ est un polynôme de degré m qui, dans certains cas concrets, peut être choisi convenablement.

Dans la formule (3) nous désignons par $[y_1, y_2, \dots, y_r; f]$ la différence divisée, d'ordre $r-1$, de la fonction $f(x)$ sur les noeuds (distincts) $y_1, y_2, \dots, y_r$.

3. Nous avons alors le

THÉORÈME 1. *Pour que la fonctionnelle linéaire $R[f]$, de degré d'exactitude m , soit de la forme simple, il faut et il suffit que l'on ait $R[f] \neq 0$, pour toute fonction $f(x) \in S$ convexe d'ordre m .*

Pour la notion et les propriétés des fonctions convexes (non-concaves, non-convexes, concaves) d'ordre m et pour la démonstration du théorème 1, le lecteur peut consulter mes travaux antérieurs. La fonction $f(x)$ est dite *convexe d'ordre m* sur I si toutes ses différences divisées d'ordre $m+1$, sur des noeuds distincts, sont positives. En particulier dans mes mémoires de „Mathematica” [7, 8] on peut trouver diverses applications et diverses généralisations de la notion de simplicité d'une fonctionnelle linéaire.

Si $m \geq 0$ on peut même affirmer que les points ξ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, m+2$ de la formule (3) sont à l'intérieur de l'intervalle I .

Si $m \geq 0$ et si $f(x)$ a une dérivée d'ordre $m+1$ à l'intérieur de I , nous avons, grâce à une formule de la moyenne importante de A. CAUCHY [1],

$$(4) \quad R[f] = K \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \quad (K = R[x^{m+1}])$$

en supposant que $R[f]$ est de degré d'exactitude m et qu'il est de la forme simple, ξ étant un point à l'intérieur de l'intervalle I .

La formule (4) peut, en particulier, servir à donner une borne supérieure de $R[f]$ lorsqu'on connaît $f^{(m+1)}(x)$, la dérivée $(m+1)^{\text{ième}}$ de la fonction $f(x)$.

4. Revenons à la formule de quadrature (1). Nous allons démontrer d'abord que, sous l'hypothèse H. 1 et en supposant que $R_n[f]$ soit de degré d'exactitude m , les coefficients d_α , $\alpha = 0, 1, \dots, m-1$ sont déterminés indépendamment de n .

Calculons $R_n[x^k]$. En utilisant la théorie bien connue des nombres B_α et des

polynomes $B_\alpha(x)$ de Bernoulli, telle qu'elle est exposée dans le traité classique de N. E. NÖRLUND [6], nous avons, pour k entier ≥ 0 ,

$$(5) \quad \int_0^n x^k dx - \sum_{\alpha=0}^n \alpha^k = \frac{1}{k+1} \left[\sum_{\alpha=1}^k (-1)^{k-\alpha} \binom{k+1}{\alpha} B_{k+1-\alpha} n^\alpha + (1 + (-1)^k) B_{k+1} \right].$$

Si nous posons

$$(6) \quad s_k = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \alpha^k d_\alpha, \quad k = 0, 1, \dots$$

($s_0 = d_0 + d_1 + \dots + d_{m-1}$), nous avons

$$(7) \quad \sum_{\alpha=0}^{m-1} d_\alpha [\alpha^k + (n-\alpha)^k] = \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{k-\alpha} \binom{k}{\alpha} s_{k-\alpha} n^\alpha + [1 + (-1)^k] s_k.$$

En comparant les formules (5), (7) il découle que, si nous posons

$$(8) \quad s_k = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \alpha^k d_\alpha = \frac{B_{k+1}}{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots, m-1),$$

nous avons $R_n[x^k] = 0$, $k = 0, 1, \dots, m$. L'exactitude de la dernière égalité ($R_n[x^m] = 0$) est assurée par l'hypothèse H. 1 (l'imparité de m).

Le système (8) détermine complètement et indépendamment de n les coefficients d_α , $\alpha = 0, 1, \dots, m-1$. Le fait que le reste $R_n[f]$ est effectivement de degré d'exactitude m résultera de ce qui suit.

5. Nous allons maintenant démontrer le

THÉORÈME 2. Si $m+n > 1$ et si les coefficients d_α , $\alpha = 0, 1, \dots, m-1$ sont déterminés par les équations (8), sous les hypothèses H. 1, H. 2, le reste $R_n[f]$ est de degré d'exactitude m et il est de la forme simple, c'est-à-dire que

$$(9) \quad R_n[f] = R_n[x^{m+1}][\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+2}; f]$$

où ξ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, m+2$ sont $m+2$ points distincts à l'intérieur de l'intervalle I (et dépendent en général de la fonction $f(x)$).

La condition $m+n > 1$ est essentielle. En effet si $m+n = 1$ on a nécessairement $m = 1$, $n = 0$ et alors $R_0[f] = 0$, quelle que soit la fonction $f(x)$.

La démonstration se fait maintenant par étapes en démontrant successivement les lemmes suivants.

LEMME 1. Si $f(x)$ est une fonction convexe d'ordre m , on a $R_n[f] - R_{n-1}[f] < 0$, $n = 1, 2, \dots$.

C'est une conséquence du critère de simplicité de Steffensen [8]. On peut l'obtenir d'ailleurs facilement de la manière suivante. La différence $R[f] = R_n[f] - R_{n-1}[f]$ est le reste de la formule de quadrature ($n > 0$)

$$\int_{n-1}^n f(x) dx = f(n) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} d_\alpha [f(n-\alpha) - f(n-\alpha-1)] + R[f]$$

qui est de degré d'exactitude $\geq m$. C'est alors nécessairement la formule de Cotes dans l'intervalle $[n-1, n]$ relativement aux noeuds $n-\alpha$, $\alpha=0, 1, \dots, m$. Nous avons donc

$$R[f] = \int_{n-1}^n [f(x) - L(n, n-1, \dots, n-m; f|x)] dx$$

où nous désignons par $L(y_1, y_2, \dots, y_r; f|x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x)$ sur les noeuds $y_1, y_2, \dots, y_r$. On sait que (pour x différent d'un noeud),

$$f(x) - L(n, n-1, \dots, n-m; f|x) = \prod_{\alpha=0}^m (x - n + \alpha) \cdot [n, n-1, \dots, n-m, x; f]$$

et le lemme résulte du fait que le polynôme $\prod_{\alpha=0}^m (x - n + \alpha)$ est négatif sur l'intervalle ouvert $]n-1, n[$ et que le second facteur du second membre, la différence divisée d'ordre $m+1$ est, par hypothèse, positive.

En particulier si $m=1$ et si $f(x)$ est une fonction convexe d'ordre 1, on a $R_1[f] < 0$.

LEMME 2. Si $m > 1$ et si $f(x)$ est une fonction convexe d'ordre m , on a

$$R_{m-1}[f] < 0.$$

Dans ce cas la formule (1) est la formule de Cotes relative aux m noeuds $0, 1, \dots, m-1$. La propriété résulte alors de la simplicité du reste de cette formule [8].

LEMME 3. Si $m > 1$ et si $f(x)$ est une fonction convexe d'ordre m , on a

$$R_{m-2}[f] > 0.$$

La démonstration est encore basée sur le critère de Steffensen qui découle d'ailleurs des importants résultats de J. F. STEFFENSEN [9] sur le reste des formules du type Cotes. En suivant l'exposé de J. F. STEFFENSEN nous pouvons démontrer le lemme 3 en remarquant d'abord qu'on peut écrire

$$(10) \quad R_{m-2}[f] = A[f] + B[f]$$

où $A[f]$ est le reste dans la formule de Cotes dans l'intervalle $[m-3, m-2]$ et $B[f]$ le reste dans la formule de Cotes dans l'intervalle $[0, m-3]$, tous les deux sur les noeuds $-1, 0, 1, \dots, m-1$.

Alors $A[f]$ est l'intégrale de $m-3$ à $m-2$ de la différence (pour x différent d'un noeud)

$$(11) \quad f(x) - L(-1, 0, 1, \dots, m-1; f|x) = \prod_{\alpha=0}^m (x + 1 - \alpha) \cdot [-1, 0, 1, \dots, m-1, x; f]$$

et le polynôme $\prod_{\alpha=0}^m (x + 1 - \alpha)$ est positif sur l'intervalle $]m-3, m-2[$. Il en résulte que si $f(x)$ est convexe d'ordre m , on a

$$(12) \quad A[f] > 0.$$

Lorsque $m=3$ on a $B[f]=0$, quel que soit $f(x)$.

Si $m>3$, $B[f]$ est l'intégrale de 0 à $m-3$ de la même différence (11). En suivant toujours un raisonnement de J. F. STEFFENSEN [9] remarquons maintenant que la différence (11) peut s'écrire (pour x différent d'un noeud)

$$\prod_{\alpha=0}^{m-1} (x+1-\alpha) \{[-1, 0, 1, \dots, m-2, x; f] - [-1, 0, 1, \dots, m-1; f]\}$$

et il s'ensuit que $B[f]$ est le reste de la formule de Cotes dans l'intervalle $[0, m-3]$ sur les noeuds $-1, 0, 1, \dots, m-2$. On déduit des considérations faites par J. F. STEFFENSEN [9] sur le polynôme $P(x) = \prod_{\alpha=0}^{m-1} (x+1-\alpha)$ que le polynôme

$\int_0^x P(t)dt$ est négatif sur l'intervalle ouvert $]0, m-3[$ et est nul pour $x=m-3$.

On en déduit que si $f(x)$ est une fonction convexe d'ordre m , on a

$$(13) \quad B[f] > 0.$$

Les formules (10), (12) et (13) démontrent le lemme 3.

On obtient maintenant facilement le théorème 2. On peut conclure de la formule

$$R_n[f] = R_{m-1}[f] + \sum_{\alpha=0}^{n-m} \{R_{m+\alpha}[f] - R_{m+\alpha-1}[f]\}$$

où $n \geq m$ et des lemmes 1, 2 que

$$(14) \quad R_n[f] < 0, \quad n \geq m-1$$

pour toute fonction $f(x)$ convexe d'ordre m .

Si $m>1$, il vient de la formule

$$R_n[f] = R_{m-2}[f] - \sum_{\alpha=0}^{m-n-3} \{R_{m-2-\alpha}[f] - R_{m-3-\alpha}[f]\}$$

où $n \leq m-3$ et des lemmes 1, 3 que

$$(15) \quad R_n[f] > 0, \quad n \leq m-2$$

pour toute fonction $f(x)$ convexe d'ordre m .

La fonction x^{m+1} est convexe d'ordre m et alors les formules (14), (15) montrent que $R_n[f]$ est effectivement de degré d'exactitude m . Le théorème 2 est donc une conséquence du théorème 1.

6. Les considérations précédentes permettent aussi de calculer, sous diverses formes, le facteur $R_n[x^{m+1}]$ qui figure dans la formule (9). Compte tenu de la formule (5), de la notation (6) et de l'hypothèse H. 1, nous avons ($m>1$)

$$R_n[x^{m+1}] = \frac{1}{m+2} \left[\sum_{\alpha=1}^{m+1} (-1)^{m+1-\alpha} \binom{m+2}{\alpha} B_{m+2-\alpha} n^\alpha \right] - \\ - \sum_{\alpha=1}^{m+1} (-1)^{m+1-\alpha} \binom{m+1}{\alpha} S_{m+1-\alpha} n^\alpha - 2S_{m+1}.$$

Nous obtenons ainsi, en vertu de (8),

$$R_n[x^{m+1}] = [(m+1)s_m - B_{m+1}]n - 2s_{m+1} = \lambda n + \mu,$$

expression linéaire par rapport à n , λ , μ étant des coefficients numériques indépendants de n .

Il en résulte qu'on a aussi

$$R_n[x^{m+1}] = (n-m+2)R_{m-1}[x^{m+1}] - (n-m+1)R_{m-2}[x^{m+1}]$$

et dans cette formule $R_{m-1}[x^{m+1}]$, $R_{m-2}[x^{m+1}]$ peuvent être obtenus en suivant la démonstration des lemmes 2, 3.

L'interprétation de $R_{m-1}[f]$ donne

$$R_{m-1}[x^{m+1}] = \int_0^{m-1} \left[x + \frac{m(m-1)}{2} \right] \prod_{\alpha=0}^{m-1} (x-\alpha) dx$$

et celle de $R_{m-2}[f]$ que

$$R_{m-2}[x^{m+1}] = \int_0^{m-3} \left[x + \frac{m(m-3)}{2} \right] \prod_{\alpha=0}^{m-1} (x+1-\alpha) dx + \int_{m-3}^{m-2} \prod_{\alpha=0}^m (x+1-\alpha) dx.$$

Dans le cas $m=1$ nous avons $\lambda = -\frac{1}{6}$, $\mu=0$ et

$$R_n[f] = -\frac{n}{6} [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f]$$

est le reste de la formule du trapèze

$$\int_0^n f(x) dx = \frac{1}{2} f(0) + f(1) + \dots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) + R_n[f].$$

Si $m > 1$, l'analyse précédente nous montre que $\lambda < 0$ et $\mu > 0$, $m-2 < \frac{\mu}{-\lambda} < m-1$.

7. Lorsque la fonction $f(x)$ a une dérivée d'ordre $m+1$ à l'intérieur de l'intervalle I , on a

$$R_n[f] = R_n[x^{m+1}] \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!},$$

ξ étant un point à l'intérieur de I .

Ce résultat, pour $m=3, 5, 7$ a été obtenu, d'une autre manière, par D. V. IONESCU [2] et D. V. IONESCU et A. COTIU [3, 4].

Lorsque $|f^{(m+1)}(x)| \leq M(m+1)!$ pour $x \in I$, on obtient la délimitation

$$|R_n[f]| \leq |R_n[x^{m+1}]| M,$$

M étant un nombre réel non-négatif. Une telle borne supérieure du reste existe encore si la fonction $f(x)$ est à $(m+1)$ ^{ième} différence divisée en valeur absolue par M . Un exemple d'une telle fonction est fourni par tout $f(x)$ qui à une m ^{ième} dérivée $f^{(m)}(x)$ vérifiant une condition de Lipschitz ordinaire.

Bibliographie

- [1] A. CAUCHY, Sur les fonctions interpolaires, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **11** (1840), pp. 775—789.
- [2] D. V. IONESCU, Nouvelles formules pratiques de quadrature, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **259** (1964), p. 504—507.
- [3] D. V. IONESCU—A. COTIU, Une extension de la formule de quadrature de Lacroix, *Mathematica*, **9** (32) (1967), p. 49—52.
- [4] D. V. IONESCU, Une nouvelle extension de la formule de quadrature de Lacroix, *Colloque sur la théorie de l'approx. des fonctions, Cluj, 1967* (résumé des communications), p. 76.
- [5] R. v. MISES, Über allgemeine Quadraturformeln, *J. f. die reine u. angew. Math.*, **174** (1936), p. 56—67.
- [6] N. E. NÖRLUND, *Differenzenrechnung* (1924).
- [7] T. POPOVICIU, Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse, *Mathematica*, **1** (24) (1959), p. 95—142.
- [8] T. POPOVICIU, La simplicité du reste dans certaines formules de quadrature, *Mathematica*, **6** (29) (1964), p. 157—184.
- [9] J. F. STEFFENSEN, *Interpolation* (1950).