

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GAU, E. GOURSAT, J. HADAMARD,
G. KÖNIGS, S. LEFSCHETZ, G. LORIA, M. D'OCAGNE, S. RINDI, H. VILLAT,
V. VOLTERRA, ETC., PIERRE GAUJA, *secrétaire de la rédaction*.

Sous la direction de la Commission des Hautes Études

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,

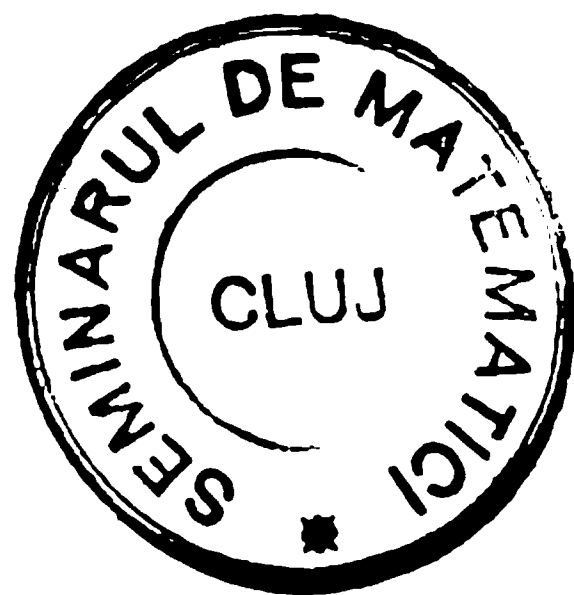
CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME L. — ANNÉE 1926

(LXI^e VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

Inv. G. 3038

SUR LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE ET LE NOYAU RÉSO- LVANT D'UN NOYAU DONNÉ ;

PAR M. D. V. JONESCO.

Résumé.

1. Considérons les équations intégrales

$$(1) \quad \varphi(x) + \mu \int_a^b N(xs) \varphi(s) ds = f(x),$$

$$(2) \quad f(x) + \lambda \int_a^b M(xs) f(s) ds = F(x).$$

En éliminant la fonction $f(x)$ entre ces équations, on trouve l'équation intégrale

$$(3) \quad \varphi(x) + \int_a^b P(xs) \varphi(s) ds = F(x),$$

où

$$(4) \quad P(xy) = \lambda M(xy) + \mu N(xy) + \lambda\mu \int_a^b M(xt) N(ty) dt.$$

La fonction caractéristique de ce noyau pour la valeur 1 du paramètre est

$$(5) \quad D_P(1) = D_M(\lambda) \times D_N(\mu)$$

et le noyau résolvant, toujours pour la valeur 1 du paramètre,

$$(6) \quad \mathcal{R} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} 1 \right) = \lambda \mathcal{R} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \lambda \right) + \mu \mathcal{R} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \mu \right) - \lambda\mu \int_a^b \mathcal{R} \left(\begin{smallmatrix} t \\ y \end{smallmatrix} \lambda \right) \mathcal{R} \left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix} \mu \right) dt.$$

2. Toute solution fondamentale de l'équation (1), relative à une valeur caractéristique du noyau $N(x, y)$, est solution fondamentale de l'équation (3) pour la valeur 1 du paramètre.

Toute solution fondamentale de l'équation associée à l'équation (2), relative à une valeur caractéristique du noyau $M(x, y)$,

est une solution fondamentale de l'équation associée à l'équation (3) pour la valeur 1 du paramètre.

Toute solution fondamentale de l'équation (2), relative à une valeur caractéristique du noyau $M(x, y)$, est solution de l'équation

$$\varphi(x) + \int_a^b \bar{P}(xs) \varphi(s) ds = 0,$$

où

$$\bar{P}(xy) = \lambda M(xy) + \mu N(xy) + \lambda \mu \int_a^b M(ty) N(xt) dt.$$

De ces propositions résulte un théorème important de M. Heywood ⁽¹⁾ sur les solutions fondamentales d'une équation intégrale dont le noyau est la somme de deux noyaux orthogonaux.

3. Nous avons déduit des formules (4), (5) et (6) les théorèmes de MM. Goursat ⁽²⁾ et Heywood ⁽³⁾ sur l'addition de deux noyaux orthogonaux.

Dans le cas de semi-orthogonalité, lorsque seulement la relation

$$\int_a^b M(xt) N(ty) dt = 0$$

est vérifiée, nous avons trouvé pour le noyau résolvant du noyau

$$P(xy) = M(xy) + N(xy),$$

$$\mathfrak{N} \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \lambda \right) = \mathfrak{N} \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \lambda \right) + \mathfrak{N} \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \lambda \right) - \lambda \int_a^b \mathfrak{N} \left(\begin{matrix} t \\ y \end{matrix} \lambda \right) \mathfrak{N} \left(\begin{matrix} x \\ t \end{matrix} \lambda \right) dt.$$

4. Nous avons appliqué les formules (4), (5), (6) à la recherche de la fonction caractéristique et le noyau résolvant d'un noyau itéré d'ordre p . Nous avons trouvé

$$D_{M_p}[-(-\lambda)^{p+1}] = D_M(\lambda) D_M(\alpha\lambda) \dots D_M(\alpha^p\lambda),$$

$$\mathfrak{N}_p \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}, -(-\lambda)^{p+1} \right]$$

$$= \int_a^b \mathfrak{N} \left(\begin{matrix} t_1 \\ y \end{matrix} \lambda \right) \mathfrak{N} \left(\begin{matrix} t_2 \\ t_1 \end{matrix} \alpha\lambda \right) \dots \mathfrak{N} \left(\begin{matrix} x \\ t_p \end{matrix} \alpha^p\lambda \right) dt_1 dt_2 \dots dt_p,$$

⁽¹⁾ B. HEYWOOD, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908, p. 290.

⁽²⁾ E. GOURSAT, *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1908, p. 27 et 29.

⁽³⁾ B. HEYWOOD, *Mémoire cité*, p. 288 et 289.

$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^p$ étant les racines de l'équation

$$Z^{p+1} - 1 = 0.$$

La première de ces formules a été donné aussi par M. Goursat ⁽¹⁾.

5. En prenant dans les formules (4), (5), (6)

$$N(xy) = \mathfrak{N} \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \lambda \right),$$

on trouve facilement la fonction caractéristique et le noyau résolvant du noyau $\mathfrak{N} \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \lambda \right)$ par rapport au paramètre μ .

6. De même en prenant dans les formules (3), (5), (6)

$$N(xy) = \mathcal{F}(x) g(y),$$

où $\mathcal{F}(x)$ est la solution de l'équation intégrale

$$\mathcal{F}(x) + \lambda \int_a^b M(xs) \mathcal{F}(s) ds = f(x),$$

on retrouve les résultats obtenus par M. Lalesco ⁽²⁾ sur le noyau

$$M(xy) + f(x) g(y).$$

* * *

1. Considérons les équations intégrales

$$(1) \quad \varphi(x) + \mu \int_a^b N(xs) \varphi(s) ds = f(x),$$

$$(2) \quad f(x) + \int_a^b M(xs) f(s) ds = F(x).$$

Remplaçons dans l'équation (2), $f(x)$ par le premier membre de l'équation (1). Nous obtenons ainsi l'équation

$$(3) \quad \varphi(x) + \int_a^b P(xs) \varphi(s) ds = F(x),$$

⁽¹⁾ E. GOURSAT, Mémoire cité, p. 96.

⁽²⁾ TR. LALESCO, *Société Roumaine des Sciences. Bulletin des Sciences mathématiques pures et appliquées*, 1923, nos 4-6, p. 18.

où le noyau $P(xy)$ est lié aux noyaux $M(xy)$ et $N(xy)$ par la formule

$$P(xy) = \lambda M(xy) + \mu N(xy) + \lambda \mu \int_a^b M(xt) N(ty) dt.$$

Supposons $f(x)$ non identiquement nulle; alors le second membre de l'équation (3) est nul si λ est une valeur caractéristique du noyau $M(xy)$, d'après un théorème de M. Fredholm. D'autre part, l'équation (3), où le second membre est nul, a une solution non nulle, la solution de l'équation (1) [on suppose que μ n'est pas une valeur caractéristique pour le noyau $N(xy)$]. Il résulte alors, d'après le même théorème de M. Fredholm, que 1 est une valeur caractéristique du noyau $P(xy)$.

Donc, à toute valeur caractéristique du noyau $M(xy)$ correspond la valeur caractéristique 1 pour le noyau $P(xy)$.

Ceci m'a amené à calculer la fonction caractéristique et le noyau résolvant du noyau $P(xy)$ pour la valeur 1 du paramètre.

Je suis arrivé aux résultats suivants :

Le noyau

$$(4) \quad P(xy) = \lambda M(xy) + \mu N(xy) + \lambda \mu \int_a^b M(xt) N(ty) dt$$

a, pour fonction caractéristique, correspondant à la valeur 1 du paramètre,

$$(5) \quad D_P(1) = D_M(\lambda) \cdot D_N(\mu),$$

et pour noyau résolvant, toujours pour la valeur 1 du paramètre,

$$(6) \quad \mathcal{R}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}, 1\right) = \lambda \mathcal{R}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}, \lambda\right) + \mu \mathcal{R}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}, \mu\right) - \lambda \mu \int_a^b \mathcal{R}\left(\begin{matrix} t \\ y \end{matrix}, \lambda\right) \mathcal{R}\left(\begin{matrix} x \\ t \end{matrix}, \mu\right) dt.$$

Les démonstrations de ces théorèmes sont assez simples.

a. Démonstration de la formule (5). — Divisons l'intervalle (a, b) en n parties égales par les points

$$x_i = a + i\delta, \quad \left(\delta = \frac{b-a}{n}\right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

On peut remplacer les équations (1) et (2) par les équations approchées

$$(1') \quad \varphi(x) + \mu\delta \sum_{k=1}^n N(x, x_k) \varphi(x_k) = f(x)$$

et

$$(2') \quad f(x) + \lambda\delta \sum_{k=1}^n M(x, x_k) f(x_k) = F(x),$$

où $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$ sont les solutions du système des n équations linéaires

$$(7) \quad \varphi(x_p) + \mu\delta \sum_{k=1}^n N(x_p, x_k) \varphi(x_k) = f(x_p) \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

et $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ sont les solutions du système des n équations linéaires

$$(8) \quad f(x_p) + \lambda\delta \sum_{k=1}^n M(x_p, x_k) f(x_k) = F(x_p) \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Remplaçons dans l'équation (2') $f(x)$ par le premier membre de l'équation (1') et $f(x_1), \dots, f(x_p)$ par les premiers membres du système (7). On obtient l'équation

$$(9) \quad \varphi(x) + \delta \sum_{i=1}^n \bar{P}(xx_i) \varphi(x_i) = F(x)$$

où

$$\bar{P}(xx_i) = \lambda M(xx_i) + \mu N(xx_i) + \lambda\mu \sum_{k=1}^n M(xx_k) N(x_k x_i).$$

Or, cette expression représente la valeur approchée du coefficient de $\varphi(x_i)$ dans l'évaluation approchée de l'intégrale

$$\int_a^b P(xs) \varphi(s) ds,$$

où $P(xy)$ est le noyau (4).

Donc, l'équation (9) est l'équation qui donne la solution approchée de l'équation (3).

Les inconnues $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$, qui figurent dans

l'équation (9), peuvent être déterminées par le système des n équations

$$(10) \quad \varphi(x_i) + \delta \sum_{k=1}^n P x_i x_k \varphi(x_k) = F(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Il est bon de remarquer que le système (10) est le résultat de la substitution dans le système (8) des $f(x_p)$ par les $\varphi(x_p)$ données par le système (7).

Soient $\Delta_N^{(n)}$ le déterminant du système (7), $\Delta_M^{(n)}$ celui du système (8) et $\Delta_P^{(n)}$ celui du système (10).

D'après un théorème connu sur les substitutions linéaires, on a

$$\Delta_P^{(n)} = \Delta_M^{(n)} \times \Delta_N^{(n)}.$$

M. Hilbert ⁽¹⁾ a démontré que $\Delta_M^{(n)}$ tend vers $D_M(\lambda)$ lorsque n tend vers l'infini. Donc en faisant n tendre vers l'infini, dans l'égalité précédente, on obtient

$$D_P(1) = D_M(\lambda) \times D_N(\mu).$$

La formule (5) est donc démontrée.

b. Démonstration de la formule (6). — Les solutions des équations (1) et (2) sont

$$(11) \quad \varphi(x) = f(x) - \mu \int_a^b \mathcal{U} \left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \mu \right) f(s) ds,$$

$$(12) \quad f(x) = F(x) - \lambda \int_a^b \mathcal{N} \left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \lambda \right) F(s) ds.$$

Remplaçons $f(x)$ donnée par l'équation (12) dans l'équation (11). On a

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & F(x) - \lambda \int_a^b \mathcal{N} \left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \lambda \right) F(s) ds - \mu \int_a^b \mathcal{U} \left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \mu \right) F(s) ds \\ & + \lambda \mu \int_a^b \mathcal{U} \left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \mu \right) \mathcal{N} \left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \lambda \right) F(t) ds dt \end{aligned}$$

⁽¹⁾ D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen* (Göttings Nachrichten, Erste Mitteilung 1904).

Voir aussi, Ch. PLATHIER, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1913, p. 245.

ou

$$\varphi(x) = F(x) - \int_a^b \left[\lambda \mathfrak{N} \left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \lambda \right) + \mu \mathfrak{Z} \left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \mu \right) - \lambda \mu \int_a^b \mathfrak{N} \left(\begin{smallmatrix} t \\ s \end{smallmatrix} \lambda \right) \mathfrak{Z} \left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix} \mu \right) dt \right] F(s) ds.$$

Cette expression représente la solution de l'équation (3). Donc

$$\mathfrak{X} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) = \lambda \mathfrak{N} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \lambda \right) + \mu \mathfrak{Z} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \mu \right) - \lambda \mu \int_a^b \mathfrak{N} \left(\begin{smallmatrix} t \\ y \end{smallmatrix} \lambda \right) \mathfrak{Z} \left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix} \mu \right) dt.$$

Donc la formule (6) est démontrée.

Nota. — J'ai démontré les formules (5) et (6), aussi en partant des fonctions de Fredholm, mais les calculs sont longs et l'exposition de ces démonstrations assez pénible.

(A suivre.)