BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GAU, E. GOURSAT, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, S. LEFSCHETZ, G. LORIA, M. D'OCAGNE, S. RINDI, H. VILLAT,
V. VOLTERRA, ETC., PIERRE GAUJA, *secrétaire de la rédaction.*

Sous la direction de la Commission des Hautes Études

—

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,
CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME L. — ANNÉE 1926

(LXIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1926

SUR LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE ET LE NOYAU RÉSOLVANT D'UN NOYAU DONNÉ;

PAR M. D. V. JONESCO.

(*Fin.*)

Nota. — J'ai démontré les formules (5) et (6), aussi en partant des fonctions de Fredholm, mais les calculs sont longs et l'exposition de ces démonstrations assez pénible.

2. Considérons les équations

$$\varphi_1(x) + \mu \int_a^b \mathrm{N}(xs)\,\varphi_1(s)\,ds = 0, \tag{13}$$

$$\psi_2(x) + \lambda \int_a^b \mathrm{M}(sx)\psi_2(s)\,ds = 0, \tag{14}$$

$$\varphi(x) + \int_a^b \mathrm{P}(xs)\,\varphi(s)\,ds = 0, \tag{15}$$

$$\psi(x) + \int_a^b \mathrm{P}(sx)\,\psi(s)\,ds = 0, \tag{16}$$

l'équation (14) est l'équation associée de l'équation (2); $\mathrm{P}(xy)$ est le noyau (4).

Nous allons démontrer la proposition suivante :

Toute solution de l'équation (13) *est une solution de l'équation* (15) *et toute solution de l'équation* (14) *est une solution de l'équation* (16).

En effet, faisons $x = s$ dans l'équation (13) multiplions les deux membres par $\mathrm{M}(xs)$ et intégrons de a à b. On obtient

$$\int_a^b \left[\mathrm{M}(xs) + \mu \int_a^b \mathrm{M}(xt)\mathrm{N}(ts)\,dt\right] \varphi_1(s)\,ds = 0.$$

Maintenant multiplions les deux membres de (4) par $\varphi_1(y)\,dy$

et intégrons de a à b. On aura

$$\int_a^b P(xy)\varphi_1(y)\,dy = \mu\int_a^b N(xy)\varphi_1(y)\,dy + \lambda\int_a^b\left[M(xy)+\mu\int_a^b M(xt)N(ty)\,dt\right]\varphi_1(y)\,dy,$$

ou

$$\int_a^b P(xs)\varphi_1(s)\,ds = \mu\int_a^b N(xs)\varphi_1(s)\,ds.$$

Le second membre de cette égalité est égal à $-\varphi_1(x)$, d'après l'équation (13). Donc :

$$\varphi_1(x)+\int_a^b P(xs)\varphi_1(s)\,ds = 0.$$

On démontre de la même manière que toute solution de l'équation (14) est solution de l'équation (15).

Remarque. — Si nous remplaçons $\lambda M(xy)$ par $\mu N(xy)$ dans ce qui précède, nous obtenons :

Toute solution de l'équation

$$\varphi_2(x)+\lambda\int_a^b M(xs)\varphi_2(s)\,ds = 0 \tag{17}$$

est solution de l'équation

$$\varphi(x)+\int_a^b P_1(xs)\varphi(s)\,ds = 0,$$

où

$$P_1(xy) = \lambda M(xy)+\mu N(xy)+\lambda\mu\int_a^b M(ty)\,N(xt)\,dt.$$

Si les noyaux $M(xy)$ et $N(xy)$ sont orthogonaux c'est-à-dire si

$$\int_a^b M(xt)\,N(ty)\,dt = \int_a^b M(ty)N(xt)\,dt,$$

le noyau $P(xy)$, (4) est égal au noyau $P_1(xy)$.

Donc, dans ce cas, toute solution de l'équation (13) ou (17) est une solution de l'équation

$$\varphi(x)+\int_a^b [\lambda M(xs)+\mu N(xs)]\varphi(s)\,ds = 0.$$

Nous obtenons ainsi un théorème de M. B. Heywood (1).

Si $\varphi(x)$ *représente une solution de l'équation* (15), *on démontre sans peine que*

$$\varphi_2(x) = \varphi(x) + \mu \int_a^b N(xs)\varphi(s)\,ds$$

est une solution de l'équation (17).

De même *si* $\psi(x)$ *est une solution de l'équation* (16),

$$\psi_1(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b M(sx)\psi(s)\,ds$$

est une solution de l'équation associée à l'équation (13).

En effet, on a

$$\lambda \int_a^b M(xs)\varphi_2(s)\,ds = \lambda \int_a^b M(xs)\varphi(s)\,ds + \lambda\mu \int_a^b M(xt)N(ts)\varphi(s)\,ds\,dt$$

et par suite

$$\varphi_2(x) + \lambda \int_a^b M(xs)\varphi_2(s)\,ds = 0,$$

parce que le second membre représente le premier membre de l'équation (15).

Même démonstration pour $\psi_1(x)$.

3. *L'addition des noyaux orthogonaux.* — Deux noyaux $M(xy)$ et $N(xy)$ sont dits orthogonaux, si l'on a identiquement

$$\int_a^b M(xt)N(ty)\,dt = 0, \qquad \int_a^b M(ty)N(xt)\,dt = 0.$$

Si seulement une de ces relations est vérifiée, les noyaux sont semi-orthogonaux.

Considérons le noyau

$$P(xy) = M(xy) + N(xy).$$

(1) B. HEYWOOD, *Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908, p. 29).

MM. Goursat et Heywood (¹) ont établi les théorèmes :

a. Si les deux noyaux $M(xy)$ *et* $N(xy)$ *sont orthogonaux ou semi-orthogonaux, on a la relation*

$$D_P(\lambda) = D_M(\lambda) \times D_N(\lambda).$$

b. Si les deux noyaux $M(xy)$ *et* $N(xy)$ *sont orthogonaux, on a la relation*

$$\mathfrak{P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda + \mathfrak{N}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda.$$

Je vais déduire ces théorèmes des formules (4), (5) et (6) et en plus donner l'expression du noyau résolvant du noyau

$$P(xy) = M(xy) + N(xy),$$

dans le cas ou les noyaux $M(xy)$ et $N(xy)$ sont semi-orthogonaux seulement.

a et *b*. Supposons les noyaux $M(xy)$ et $N(xy)$ orthogonaux. Les formules (4), (5) et (6) deviennent

$$P'(xy) = \lambda M(xy) + \mu N(xy),$$
$$D_{P'}(1) = D_M(\lambda) \times D_N(\mu),$$
$$\mathfrak{P}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}1 = \lambda\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda + \mu\mathfrak{N}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mu.$$

Ces formules étant valables quels que soient λ et μ, on peut faire $\lambda = \mu$. On a

$$P'(xy) = \lambda[M(xy) + N(xy)],$$

c'est-à-dire

$$P'(xy) = \lambda P(xy); \tag{18}$$

si l'on observe que

$$D_{P'}(1) = D_P(\lambda) \tag{19}$$

et

$$\mathfrak{P}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}1 = \lambda\mathfrak{P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda,$$

(¹) E. Goursat, *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1908, p. 27 et 29. — B. Heywood, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908, p. 288 et 289.

les relations précédentes deviennent

$$D_P(\lambda) = D_M(\lambda) \times D_N(\lambda),$$
$$\mathfrak{P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda + \mathfrak{N}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda.$$

On obtient donc les théorèmes de MM. Goursat et Heywood.

c. Cas des noyaux semi-orthogonaux. — Supposons que seulement la relation

$$\int_a^b M(xt)\,N(ty)\,dt = 0$$

soit identiquement satisfaite.

Alors les formules (4), (5) et (6) donnent

$$P'(xy) = \lambda M(xy) + \mu N(xy),$$
$$D_{P'}(1) = D_M(\lambda) \times D_N(\mu),$$
$$\mathfrak{P}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} 1 = \lambda\,\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda + \mu\,\mathfrak{N}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mu - \lambda\mu\int_a^b \mathfrak{M}\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}\lambda\,\mathfrak{N}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\mu\,dt.$$

Comme précédemment si l'on fait $\lambda = \mu$, on trouve

$$D_P(\lambda) = D_M(\lambda) \times D_N(\lambda),$$
$$\mathfrak{P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda + \mathfrak{N}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda - \lambda\int_a^b \mathfrak{M}\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}\lambda\,\mathfrak{N}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\lambda\,dt.$$

Ceci apporte, je crois, plus de précision aux théorèmes de MM. Goursat et Heywood.

4. *Noyaux itérés.* — Nous allons déduire de (4), (5) et (6) les propriétés des noyaux itérés.

Faisons dans les formules (4), (5) et (6) $M(xy) = N(xy)$. On aura

$$P'(xy) = (\lambda + \mu)M(xy) + \lambda\mu\int_a^b M(xt)M(ty)\,dt.$$

Si l'on prend pour λ et μ les racines de l'équation

$$Z^2 - k^2 = 0,$$

on a

$$P'(xy) = -k^2 M_1(xy),$$

$M_1(xy)$ étant le noyau itéré de $M(xy)$. Tenant compte des relations (18) et (19), on aura

$$
(20) \qquad \begin{aligned}
&D_{M_1}(-k^2) = D_M(k)D_M(-k)\\
&-k^2\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - k^2 \Big) = k\,\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} k\Big) - k\,\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - k\Big)\\
&\qquad + k^2\int_a^b \mathfrak{M}\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} k\Big)\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} - k\Big)\,dt.
\end{aligned}
$$

La première de ces relations a été donnée par M. Goursat (¹). Nous allons transformer la seconde.

Dans l'équation générale des noyaux résolvants (signalée par MM. Hilbert et Plemelj)

$$
(21) \qquad \mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda\Big) - \mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mu\Big) = (\mu - \lambda)\int_a^b \mathfrak{M}\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}\lambda\Big)\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\mu\Big)\,dt,
$$

faisons $\lambda = k$ et $\mu = -k$. On aura

$$
\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} k\Big) - \mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - k\Big) = -2k\int_a^b \mathfrak{M}\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} k\Big)\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} - k\Big)\,dt.
$$

Alors la formule qui donne l'expression du noyau résolvant du noyau $M_1(xy)$ devient

$$
\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - k^2\Big) = \int_a^b \mathfrak{M}\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} k\Big)\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} - k\Big)\,dt;
$$

formule tout à fait analogue à la formule (20).

Pour calculer la fonction caractéristique et le noyau résolvant du noyau itéré $M_2(xy)$ il faudrait d'abord étendre les formules (4), (5), et (6) au cas de trois noyaux.

On voit sans peine que pour le noyau

$$
\begin{aligned}
P(xy) = \lambda L(xy) + \mu M(xy) + \nu N(xy) &+ \lambda\mu\int_a^b L(xt)M(ty)\,dt\\
&+ \mu\nu\int_a N(xt)M(ty)\,dt + \nu\lambda\int_a^b N(xt)L(ty)\,dt\\
&+ \lambda\mu\nu\int_a^b N(xt)M(ts)L(sy)\,ds\,dt,
\end{aligned}
$$

(¹) E. Goursat, *Mémoire cité*, p. 96.

on a

$$D_P(1) = D_L(\lambda) \times D_M(\mu) \times D_N(\nu)$$

et

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}\binom{x}{y}1 &= \lambda\mathcal{L}\binom{x}{y}\lambda + \mu\mathfrak{M}\binom{x}{y}\mu + \nu\mathfrak{N}\binom{x}{y}\nu\\ &-\lambda\mu\int_a^b \mathcal{L}\binom{t}{y}\lambda\,\mathfrak{M}\binom{x}{t}\mu\,dt\\ &-\mu\nu\int_a^b \mathfrak{N}\binom{t}{y}\nu\,\mathfrak{M}\binom{x}{t}\mu\,dt\\ &-\nu\lambda\int_a^b \mathfrak{N}\binom{t}{y}\nu\,\mathcal{L}\binom{x}{t}\lambda\,dt\\ &+\lambda\mu\nu\int_a^b \mathcal{L}\binom{x}{t}\lambda\,\mathfrak{M}\binom{t}{u}\mu\,\mathfrak{N}\binom{u}{y}\nu\,dt\,du.\end{aligned}$$

Si dans ces formules on prend

$$L(xy) = N(xy) = M(xy),$$

on a

$$P(xy) = (\lambda + \mu + \nu)\,M(xy) - (\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda)\,M_1(xy) + \lambda\mu\nu\,M^2(xy).$$

Il suffit donc de prendre pour λ, μ, ν les racines de l'équation

$$Z^3 - k^3 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = k, \qquad \mu = k\alpha, \qquad \nu = k\alpha^2,$$

1, α, α^2 étant les racines cubiques de l'unité.

En se servant toujours pour la transformation du noyau résolvant de $M_2(xy)$, comme précédemment, on trouve

$$D_{M_2}(k^3) = D_M(k)D_M(\alpha k)D_M(\alpha^2 k),$$

$$\mathfrak{M}_2\binom{x}{y}k^3 = \int_a^b \mathfrak{M}\binom{t_1}{y}k\,\mathfrak{M}\binom{t_2}{t_1}\alpha k\,\mathfrak{M}\binom{x}{t_2}\alpha^2 k\,dt_1\,dt_2.$$

Il n'y a pas de difficultés à étendre ces résultats à un noyau itéré d'ordre p.

5. *Fonction caractéristique et noyau résolvant du noyau $\mathfrak{M}\binom{x}{y}\lambda$ par rapport au paramètre μ.* — Dans les formules (4),

(5), (6), remplaçons $N(xy)$ par $\mathfrak{M}\binom{x}{y}\lambda$. On aura

$$(22)\qquad P(xy) = \lambda M(xy) + \mu\mathfrak{M}\binom{x}{y}\lambda + \lambda\mu\int_a^b M(xt)\mathfrak{M}\binom{t}{y}\lambda\, dt,$$

$$(23)\qquad D_P(1) = D_M(\lambda) D_{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu),$$

$$(24)\qquad \mathfrak{L}\binom{x}{y}1 = \lambda\mathfrak{M}\binom{x}{y}\lambda + \mu\mathfrak{M}\left(\frac{x}{t}\lambda, \mu\right) - \lambda\mu\int_a^b \mathfrak{M}\binom{t}{y}\lambda\,\mathfrak{M}\left(\frac{x}{t}\lambda, \mu\right) dt.$$

On a noté avec $D_{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu)$ la fonction caractéristique du noyau $\mathfrak{M}\binom{x}{y}\lambda$ et par $\mathfrak{M}\left(\frac{x}{y}\lambda, \mu\right)$ le noyau résolvant de ce noyau.

Nous allons transformer les formules (22) et (24). On sait qu'on a identiquement (MM. Fredholm, Goursat)

$$(25)\qquad 0 = M(xy) - \mathfrak{M}\binom{x}{y}\lambda - \lambda\int_a^b M(xt)\mathfrak{M}\binom{t}{y}\lambda\, dt,$$

et si dans cette formule on remplace $M(xy)$ par $\mathfrak{M}\binom{x}{y}\lambda$ et λ par μ, on a

$$(26)\qquad 0 = \mathfrak{M}\binom{x}{y}\lambda - \mathfrak{M}\left(\frac{x}{y}, \lambda, \mu\right) - \mu\int_a^b \mathfrak{M}\binom{t}{y}\lambda\,\mathfrak{M}\left(\frac{x}{t}\lambda, \mu\right) dt.$$

Tenant compte de la relation (25), la relation (22) se réduit à

$$P(xy) = (\lambda + \mu) M(xy),$$

et tenant compte de la relation (26), la relation (24) se réduit à

$$(24')\qquad \mathfrak{L}\binom{x}{y}1 = (\lambda + \mu)\mathfrak{M}\left(\frac{x}{y}\lambda, \mu\right).$$

Comme

$$D_P(1) = D_M(\lambda + \mu) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{L}\binom{x}{y}1 = (\lambda + \mu)\mathfrak{M}\binom{x}{y}\lambda + \mu,$$

les formules (23) et (24′) nous donnent

$$D_M(\lambda + \mu) = D_M(\lambda) \times D_{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu)$$

ou

$$D_{\mathfrak{M}}(\lambda, \mu) = \frac{D_M(\lambda + \mu)}{D_M(\lambda)},$$

et

$$\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda,\ \mu\Big) = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda + \mu\Big).$$

Cette dernière formule a été trouvée par une voie toute différente aussi par M. Ch. Platrier (¹).

6. *Étude du noyau*

$$P(xy) = M(xy) + f(x)g(y). \tag{27}$$

Soit $\mathcal{F}(x)$ la solution de l'équation intégrale

$$\mathcal{F}(x) + \lambda \int_a^b M(xs)\mathcal{F}(s)\,ds = f(x), \tag{28}$$

et considérons le noyau

$$\begin{aligned} P'(xy) &= \lambda M(xy) + \mu\mathcal{F}(x)g(y) + \lambda\mu \int_a^b M(xt)\mathcal{F}(t)g(y)\,dt \\ &= \lambda M(xy) + \mu f(x)g(y). \end{aligned} \tag{29}$$

Nous voyons que pour

$$N(xy) = \mathcal{F}(x)g(y),$$

le noyau $P(xy)$, (4) coïncide avec $P'(xy)$. Alors on peut appliquer les formules (5) et (6). On a

$$D_{P'}(1) = D_M(\lambda)D_N(\mu), \tag{30}$$

$$\mathfrak{P}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} 1\Big) = \lambda\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda\Big) + \mu\mathfrak{N}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mu\Big) - \lambda\mu\int_a^b \mathfrak{M}\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}\lambda\Big)\mathfrak{N}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\mu\Big)\,dt.$$

La solution de l'équation (28) est

$$\mathcal{F}(x) = f(x) - \lambda\int_a^b \mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}\lambda\Big)f(s)\,ds, \tag{31}$$

alors il résulte tout de suite que

$$\begin{aligned} D_N(\mu) &= 1 + \mu\int_a^b \mathcal{F}(s)g(s)\,ds \\ &= 1 + \mu\int_a^b f(s)\,g(s)\,ds - \lambda\mu\int_a^b f(t)\mathfrak{M}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda\Big)g(s)\,ds\,dt \end{aligned} \tag{32}$$

(¹) Ch. PLATRIER, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1913, p. 249.

et

$$\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mu\Big) = \frac{\mathcal{F}(x)\,g(y)}{D_N(\mu)}.$$

Alors l'expression de $\mathfrak{L}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} 1\Big)$ est

$$\mathfrak{L}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} 1\Big) = \lambda\,\mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda\Big) + \mu\,\frac{\mathcal{F}(x)\,\mathcal{G}(y)}{D_N(\mu)}, \tag{33}$$

où l'on a posé

$$\mathcal{G}(y) = g(y) - \lambda\int_a^b \mathfrak{M}\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}\lambda\Big)\,g(t)\,dt. \tag{34}$$

Remarquons que $g(y)$ est la solution de l'équation

$$\mathcal{G}(y) + \lambda\int_a^b M(sy)\,\mathcal{G}(s)\,ds = g(y). \tag{35}$$

Les relations (29), (30), (32) et (33) étant vraies quels que soient λ et μ, on peut faire $\lambda = \mu$. Alors

$$P'(xy) = \lambda P(xy),$$

et, par suite,

$$D_P(\lambda) = D_M(\lambda)\,D_N(\lambda) = D_M(\lambda)\left[1 + \lambda\int_a^b f(s)\,g(s)\,ds\right] \tag{36}$$
$$- \lambda^2 \int_a^b f(t)\,D_M\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda\Big)\,g(s)\,ds\,dt,$$
$$\mathfrak{L}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda\Big) = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda\Big) + \frac{\mathcal{F}(x)\,\mathcal{G}(y)}{D_N(\lambda)},$$

où $\mathcal{F}(x)$, $\mathcal{G}(y)$ sont données par les formules (31) et (34), $\mathcal{F}(x)$ est la solution de l'équation (28) et $\mathcal{G}(y)$ la solution de l'équation (35). Ces formules ont été établies par M. Lalesco (¹) par une voie toute différente.

Nous avons démontré à la page 247 que toute solution de l'équation

$$\varphi_1(x) + \mu\int_a^b N(xs)\,\varphi_1(s)\,ds = 0 \tag{13}$$

(¹) Tr. Lalesco, *Société roumaine des Sciences. Bulletin des Sciences mathématiques pures et appliquées*, nᵒˢ 4-6, 1923, p. 18.

est solution de l'équation

$$\varphi(x) + \int_a^b \mathrm{P}(xs)\,\varphi(s)\,ds = 0, \tag{15}$$

où $\mathrm{P}(xy)$ est le noyau (4).

Dans le cas du noyau (27) qui nous intéresse en ce moment, en faisant dans toutes les formules (13), (15) $\lambda = \mu$, pour λ_0 solution de l'équation

$$\mathrm{D}_{\mathrm{P}}(\lambda) = 0,$$

l'équation (13) est

$$\varphi_1(x) + \lambda_0 \mathcal{F}(x) \int_a^b g(s)\varphi_1(s)\,ds = 0.$$

Donc à un facteur près la solution de l'équation (13) est $\mathcal{F}(x)$. Donc *la fonction $\mathcal{F}(x)$ donnée par la formule* (31) *où l'on fait $\lambda = \lambda_0$ est la solution de l'équation*

$$\varphi(x) + \lambda_0 \int_a^b [\mathrm{M}(xs) + f(x)g(s)]\,\varphi(s)\,ds = 0. \tag{37}$$

Nous aurions pu prendre au début $\mathrm{M}(xy) = f(x)\mathcal{G}(y)$ dans l'équation (4) et ainsi nous arrivons à la proposition : *la fonction $\mathcal{G}(y)$ donnée par* (34) *où l'on fait $\lambda = \lambda_0$ est solution de l'équation*

$$\psi(y) + \lambda_0 \int_a^b [\mathrm{M}(sy) + f(s)g(y)]\,\psi(s)\,ds = 0,$$

l'associée de l'équation (37).

Ces propositions ont été également énoncées par M. Lalesco [1].

On peut étendre les résultats trouvés par M. Lalesco au cas d'un noyau

$$\mathrm{P}(xy) = \mathrm{M}(xy) + \sum_1^n f_k(x)g_k(y).$$

Il suffit de prendre dans la formule (4)

$$\mathrm{N}(xy) = \sum_1^n \mathcal{F}_k(x)\,g_k(y),$$

[1] Tr. Lalesco, *Mémoire cité*, p. 20.

où $\mathcal{F}_k(x)$ est la solution de l'équation intégrale

$$\mathcal{F}_k(x) + \lambda \int_a^b \mathrm{M}(xs)\mathcal{F}_k(s)\,ds = f_k(x), \tag{38}$$

mais les expressions de $\mathrm{D}_{\mathrm{P}}(\lambda)$, ainsi que de $\mathfrak{P}\begin{pmatrix} x & \lambda \\ y & \end{pmatrix}$ sont assez compliquées.

On démontre facilement en s'appuyant sur les propositions établies à la page 247 que l'équation

$$\varphi(x) + \lambda_0 \int_a^b \mathrm{P}(xs)\varphi(s)\,ds = 0 \tag{39}$$

a des solutions fonctions linéaires des fonctions $\mathcal{F}_1(x)$, $\mathcal{F}_2(x)$, ..., $\mathcal{F}_n(x)$. $\mathcal{F}_1(x), \ldots, \mathcal{F}_n(x)$ sont les solutions de l'équation (38), où l'on fait $\lambda = \lambda_0$.

De même l'équation associée à l'équation (39) a des solutions linéaires des fonctions $\mathcal{G}_1(x)$, $\mathcal{G}_2(x)$, ..., $\mathcal{G}_n(x)$, celles-ci étant les solutions de l'équation

$$\mathrm{G}_k(x) + \lambda_0 \int_a^b \mathrm{M}(sx)\mathrm{G}_k(s)\,ds = g_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$