

COMPTES RENDUS
HEBDOMADAIRES
DES SÉANCES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PUBLIÉS,
CONFORMÉMENT A UNE DÉCISION DE L'ACADÉMIE
EN DATE DU 13 JUILLET 1835,
PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME CENT-QUATRE-VINGT-SIXIÈME.

JANVIER. — JUIN 1928.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS et Cie, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1928

Juv. C. 1054

BCU Cluj-Napoca



PMATE201900076

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Quelques théorèmes d'existence des intégrales des systèmes d'équations différentielles.* Note de M. **D.-V. JONESCO**, présentée par M. J. Hadamard.

1. Considérons le système de n équations différentielles du premier ordre

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t; x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(¹) *Mathematische Zeitschrift*, 3, 1919, p. 176.

(²) *Annales Éc. Norm.*, 3^e série, 37, 1920, p. 253.

(³) VALIRON, *Lectures of the general theory of integral functions*, p. 105.

où $f_i(t; x_1, \dots, x_n)$ sont des fonctions continues pour les valeurs de t comprises dans l'intervalle (a, b) , et pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$. On suppose en outre que les fonctions $f_i(t; x_1, \dots, x_n)$ satisfont à la condition de Lipschitz :

$$|f_i(t; x_1, \dots, x_n) - f_i(t; x'_1, \dots, x'_n)| < \sum_{k=1}^n A_{ik} |x_k - x'_k| \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Soient d'autre part $n - 1$ points $t = t_2, \dots, t = t_n$ pris dans l'intervalle (a, b) , ($a = t_1, b = t_{n+1}$).

J'ai démontré le théorème suivant :

Si l'intervalle (a, b) est suffisamment petit, le système (1) admet une intégrale et une seule satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t_1) = 0, \\ x_2(t_2) = x_1(t_2), \\ \dots\dots\dots, \\ x_n(t_n) = x_{n-1}(t_n), \\ 0 = x_n(t_{n+1}). \end{cases}$$

En désignant par H le plus grand des nombres $\sum_{k=1}^n A_{ik}$, une limite supérieure de l'intervalle (a, b) , pour que le théorème soit possible, est $\frac{1}{2H}$.

2. Pour un système de deux équations différentielles du second ordre

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = f\left(t; x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right), \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = g\left(t; x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right); \end{cases}$$

où f et g satisfont aux conditions écrites plus haut, nous avons démontré le théorème suivant :

Lorsque l'intervalle (a, b) est suffisamment petit, il existe une intégrale et une seule du système (2) satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} x_1(t_3) = x_2(t_3) \\ x'_1(t_3) = x'_2(t_3) \end{cases} \quad [x_1(t_1) = 0; x_2(t_2) = 0],$$

t_3 étant un point donné de l'intervalle (t_1, t_2) .

Ce théorème est compris dans le n° 1. Il est vrai pour un système d'équations en nombre quelconque et pour des conditions semblables aux conditions (3) en un ou plusieurs points de l'intervalle (t_1, t_2) .

3. L'interprétation mécanique de ces considérations est la suivante :

Considérons deux systèmes matériels A et B, chacun d'eux dépendant de n paramètres. On suppose ce système soumis à l'action des forces dépendant des positions et des vitesses de tous les points du système A et B.

Le théorème du n° 2 démontre qu'il existe un mouvement du système A et B tel qu'à l'instant $t = t_1$ le système A occupe une position donnée, à l'instant $t = t_2$ le système B occupe une position également donnée et à l'instant $t = t_3$, les points des deux systèmes A et B coïncident respectivement ainsi que leurs vitesses.

4. Je fais encore remarquer que ces théorèmes ont bien d'autres applications à la physique mathématique.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *A propos d'une formule de MM. F. et R. Nevanlinna relative aux fonctions méromorphes dans un secteur.*
Note de M. VLADIMIR BERNSTEIN, présentée par M. Hadamard.

Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le domaine

$$(D) \quad \rho \geq \rho_0, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2k} \quad (x = \rho e^{i\varphi})$$

(frontière comprise) et soient $A_1, A_2, \dots, A_n = a_n e^{i\alpha_n}, \dots$ et $B_1, B_2, \dots, B_n = b_n e^{i\beta_n}, \dots$ respectivement les zéros et les pôles de $f(x)$ dans D; supposons qu'aucun des points A_μ ou B_ν ne se trouve sur le contour de D. MM. F. et R. Nevanlinna ont démontré que, si l'on pose

$$\alpha(\rho) = \frac{k}{2} \int_{\rho_0}^{\rho} \left\{ \log \left| f\left(te^{i\frac{\pi}{2k}}\right) \right| + \log \left| f\left(te^{-i\frac{\pi}{2k}}\right) \right| \right\} \frac{dt}{t},$$

$$m(\rho) = \frac{k}{2} \int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \log |f(\rho e^{i\varphi})| \cos k\varphi d\varphi,$$

$$n(\rho) = \sum_{\rho_0 \leq a_\mu < \rho} \cos k\alpha_\mu - \sum_{\rho_0 \leq b_\nu < \rho} \cos k\beta_\nu,$$

l'expression

$$(1) \quad P(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\alpha(z)}{z^{k+1}} dz + \frac{i}{\rho^k} \left\{ \frac{m(\rho)}{k} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{m(z)}{z} dz \right\} - \pi \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{n(z)}{z^{k+1}} dz$$

tend vers une limite finie P_0 (qui ne dépend que de ρ_0) lorsque ρ croît indéfi-