

MATHEMATICA

VOLUMUL IV.

1 9 3 0

Comitetul de conducere

Directori

G. TZITZEICA și D. POMPEIU

București

București

Redactori

N. ABRAMESCU,	A. ANGELESCU,	TH. ANGHELUȚĂ,	G. BRATU,
Cluj	București	Cluj	Cluj
A. DAVIDOGLU,	D. V. IONESCU,	O. ONICESCU,	C. POPOVICI,
București	Cluj	București	Iași
S. SANIELEVICI,	S. STOILOW,	V. VÂLCOVICI	
Iași	Cernăuți	București	

Secretarul de redacție

PETRE SERGESCU

Cluj



C L U J

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL”, STR. MEMORANDULUI 22

REMARQUE SUR LES POLYNOMES DE MEILLEURE APPROXIMATION

par

Tiberiu Popoviciu

Elève à l'Ecole Normale supérieure, Paris.

Reçue le 21 février 1930.

1. Nous considérons la classe (b) des fonctions définies et continues dans l'intervalle fini et fermé (a, b) ; ($a < b$). Des propriétés de ces fonctions rappelons-nous qu'elles peuvent s'annuler en un nombre fini ou infini de points, mais l'ensemble de ces points forme toujours un nombre fini d'intervalles pouvant d'ailleurs se réduire à un point.

Soit maintenant un système de $n+1$ fonctions de la classe (b)

$$(1) \quad f_1, f_2, \dots, f_n$$

linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'une égalité telle que

$$(2) \quad P = c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$$

$c_0, c_1, \dots, c_n$ étant des constantes, ne peut avoir lieu partout dans (a, b) que si

$$c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0.$$

Remarquons que le système (1) peut n'être pas linéairement indépendant dans un intervalle (α, β) intérieur à (a, b) [tel que $|\alpha - a| + |\beta - b| \neq 0$].

Toute expression linéaire et homogène telle que (2) sera appelée *un polynôme* du système (1). A tout polynôme P nous pouvons faire correspondre un point M de coordonnées $c_0, c_1, \dots, c_n$ dans l'espace ordinaire à $n+1$ dimensions. Nous appelons le point M , *l'image* du polynôme P correspondant.

Le fait que les fonctions (1) sont linéairement indépendantes peut s'exprimer de la façon suivante:

Il y a correspondance biunivoque entre les polynômes P et leurs images M .

Pour les points où P s'annule nous faisons les conventions suivantes: (1)

1°. Nous appelons *zéro simple* un point intérieur à l'intervalle (a, b) où P s'annule en changeant de signe, ou bien un point extrémité $(a$ ou $b)$ où P s'annule.

2°. Nous appelons *zéro double* et nous le comptons pour deux zéros simples, un point intérieur où P s'annule sans changer de signe.

Un système (1) est un système de TCHEBYSCHOFF ou système (T) si un polynôme quelconque P ne peut avoir plus de n zéros. Il résulte que pour qu'un système ne soit pas un système (T) il faut et il suffit qu'il y ait au moins un polynôme ayant au moins $n+1$ zéros.

Par exemple le système

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

est un système (T) dans tout intervalle fini. Au contraire le système

$$1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$$

n'est pas un système (T) dans tout intervalle $(0, 2\pi)$, mais il en est un dans un intervalle de longueur plus petite que 2π .

2. Nous allons démontrer la propriété auxiliaire suivante:

Si (1) n'est pas un système (T) on peut trouver $n+1$ points distincts $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ complètement intérieurs à (a, b) tels que le déterminant:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(x_{n+1}) & f_1(x_{n+1}) & \dots & f_n(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

soit nul.

En effet, il existe un polynôme ayant au moins $n+1$ zéros. Si un tel polynôme s'annule en au moins $n+1$ points distincts dont aucun ne coïncide avec une extrémité, la propriété est évidente.

Les points où P s'annule peuvent se ranger en 3 catégories.

1°. Ou bien P s'annule en changeant de signe; soient

$$(4) \quad x_1, x_2, \dots, x_m$$

ces points.

2°. Ou bien P s'annule en ne changeant pas de signe; soient

$$(5) \quad x'_1, x'_2, \dots, x'_k$$

(1) S. BERNSTEIN „Leçons sur les propriétés extrémales ... etc.“ p. 1.; J. W. YOUNG „General theory of approximation by fonctions involving a given nombre of arbitrary parameters“ Transactions of the Amer. Math. Soc. 8 (1907), p. 331.

ces points. Enfin:

3°. Les extrémités où P s'annule

$$x''_1, x''_2, \dots, x''_l \quad (i=0, 1, 2)$$

On a par hypothèse:

$$m+2k+i \geq n+1$$

Supposons que:

$$m+k < n+1$$

donc à fortiori

$$k < n+1$$

Supposons d'abord que

$$k < n$$

et considérons le tableau:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} f_0(x'_1) & f_1(x'_1) & \dots & f_n(x'_1) \\ f_0(x'_2) & f_1(x'_2) & \dots & f_n(x'_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0(x'_k) & f_1(x'_k) & \dots & f_n(x'_k) \\ f_0(x''_1) & f_1(x''_1) & \dots & f_n(x''_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0(x''_l) & f_1(x''_l) & \dots & f_n(x''_l) \end{vmatrix}$$

qui contient au moins autant de colonnes que de lignes.

Si dans le tableau (7) tous les déterminants formés par $k+i$ colonnes quelconques sont nuls, la propriété cherchée en résulte. Mais supposons qu'il y ait un déterminant non nul, par exemple:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} f_0(x'_1) & f_1(x'_1) & \dots & f_{k+i}(x'_1) \\ f_0(x'_2) & f_1(x'_2) & \dots & f_{k+i}(x'_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0(x'_i) & f_1(x'_i) & \dots & f_{k+i}(x'_i) \end{vmatrix} \neq 0$$

A chaque point x'_j et x''_j attachons un nombre non nul a'_j resp. a''_j tel que son signe soit celui du polynôme P au voisinage de x'_j resp. x''_j [le voisinage d'une extrémité est compté uniquement vers l'intérieur de l'intervalle]. On peut alors déterminer un système de nombres non tous nuls

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k+i}$$

tel que

$$\lambda_0 f_0(x'_1) + \lambda_1 f_1(x'_1) + \dots + \lambda_{k+i} f_{k+i}(x'_1) = a'_1$$

$$\lambda_0 f_0(x'_2) + \lambda_1 f_1(x'_2) + \dots + \lambda_{k+i} f_{k+i}(x'_2) = a'_2$$

$$\dots$$

$$\lambda_0 f_0(x''_l) + \lambda_1 f_1(x''_l) + \dots + \lambda_{k+i} f_{k+i}(x''_l) = a''_l$$

est un système minimisant, les systèmes

$$c_i = c_i^* + \lambda c_i \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

seront aussi minimisants, λ étant quelconque.

Maintenant si f est une fonction continue prenant les valeurs a_i aux points x_i ($i=1, 2, \dots, n+1$), on aura pour tout polynôme Q

$$\text{Max} |f - Q| \geq m \quad [\text{dans } (a, b)].$$

Posons

$$P^* = c_0^* f_0 + c_1^* f_1 + \dots + c_n^* f_n$$

[on peut d'ailleurs avoir $P^* \equiv 0$].

Pour fixer les idées, supposons que le polynôme P pris initialement, s'annule en un nombre fini de points; ce sont d'abord les points $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, et puis certains autres points $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$ (qui peuvent ne pas exister du tout).

Prenons la fonction f telle que:

$$(9) \quad f(x_i) = P^*(x_i) - a_i \quad i=1, 2, \dots, n+1$$

$$(10) \quad f(x'_i) = 0 \quad i=1, 2, \dots, r.$$

Les points x_i, x'_i partagent l'intervalle (a, b) en un certain nombre de sous-intervalles ($n+r, n+r+1$ ou $n+r+2$) tels que dans chacun d'eux le polynôme P garde un signe constant.

Soit

$$\text{Max} |P| = A$$

Prenons

$$0 > \lambda > -\frac{m}{A}$$

alors

$$|\lambda P| < m$$

Nous déterminons f dans chaque sous-intervalle tel qu'il soit continu et tel que (9) et (10) soient vérifiés. Pour cela nous allons examiner les diverses sortes de sous-intervalles qui peuvent se présenter.

1°. Intervalle (a, x'_1) . Dans un tel intervalle on prendra

$$f = \frac{m}{2A} P$$

alors dans (a, x'_1)

$$\lambda < 0, \quad |f - \lambda P| = |f| + |\lambda P| = \left\{ \frac{m}{2A} + |\lambda| \right\} |P|$$

et

$$|f - \lambda P| < m$$

pourvu que

$$-\frac{m}{2A} < \lambda < 0$$

On emploie la même construction pour un intervalle (x'_r, b) .

2°. Intervalle (a, x_1) [ou (x_{n+1}, b)]. On a

$$|P^*(x_1) - a_1| \leq m.$$

On prendra dans (a, x_1)

$$f = P^*(x_1) - a_1 - \frac{m}{A} P \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] > 0$$

$$f = P^*(x_1) - a_1 \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] < 0$$

on voit alors que

$$(11) \quad \text{Max} |f + \lambda P| \leq m$$

pourvu que

$$(12) \quad 0 > \lambda > -\frac{m}{A}$$

3°. Intervalle (x_1, x'_1) .

On peut prendre

$$f = (x - x'_1) \frac{P^*(x_1) - a_1}{x_1 - x'_1} - \frac{m}{A} P \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] > 0$$

$$f = (x - x'_1) \frac{P^*(x_1) - a_1}{x_1 - x'_1}, \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] < 0$$

et on a encore (11) sous les conditions (12).

4°. Intervalle (x'_1, x'_2) . Il suffit de prendre

$$f = -\frac{m}{A} P.$$

et (11) sera satisfait avec (12).

5°. Intervalle (x_1, x_2) . Posons

$$g = \frac{x[P^*(x_1) - a_1 - P^*(x_2) + a_2] + x_2[P^*(x_1) - a_1] - x_1[P^*(x_2) - a_2]}{x_1 - x_2}$$

Nous posons alors

$$f = g - \frac{m}{A} P \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] > 0, P[P^*(x_2) - a_2] > 0$$

$$\text{ou bien si } [P^*(x_1) - a_1][P^*(x_2) - a_2] < 0$$

$$f = g \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] > 0, P[P^*(x_2) - a_2] < 0.$$

On peut déterminer encore un $\lambda_1 > 0$ tel que si

$$0 > \lambda > -\lambda_1$$

on ait encore

$$\text{Max } |f - \lambda P| \leq m$$

dans l'intervalle (x_1, x_2) .

Cette propriété résulte de la remarque suivante :

Soit $g(x)$ une fonction continue dans $(0,1)$ (nous prenons l'intervalle $(0,1)$ pour simplifier l'exposé) positive (négative) dans cet intervalle et

$$g(0) = g(1) = 1$$

Soient, pour fixer les idées, $a' > 0$, $b' < 0$. On peut alors déterminer un $\lambda_1 > 0$ tel que pour $0 < \lambda < \lambda_1$ on ait

$$a' + x(b' - a') + \lambda g < a$$

dans $(0,1)$. La démonstration est immédiate.

La fonction f ainsi construite répond à la question, car λ étant compris entre

$$0, -\lambda_1$$

où λ_1 est un nombre positif, on a

$$|f - \lambda P| \leq m$$

dans (a, b) et au moins dans un point x_i on a l'égalité

$$|f - \lambda P| = m.$$

D'autre part, n'importe quel autre polynome donne

$$|f - Q| \geq m.$$

5. Si P s'annulait dans tout un intervalle (α, β) par exemple, on pourrait encore faire la construction très facilement. Les points $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ peuvent être pris à l'intérieur de (α, β) . Alors en dehors de (α, β) nous faisons la même construction que toute à l'heure. Dans (α, β) nous gardons encore les conditions (9); et dans chaque intervalle x_i, x_{i+1} nous prenons la fonction f linéaire; et constante dans (α, x_1) et (x_{n+1}, β) . La fonction ainsi obtenue répond encore à la question.