

REMARQUE SUR LES POLYNOMES DE MEILLEURE APPROXIMATION

par

Tiberiu Popoviciu

Elève à l'Ecole Normale supérieure, Paris.

Reçue le 21 février 1930.

1. Nous considérons la classe (b) des fonctions définies et continues dans l'intervalle fini et fermé (a, b) ; $(a < b)$. Des propriétés de ces fonctions rappelons-nous qu'elles peuvent s'annuler en un nombre fini ou infini de points, mais l'ensemble de ces points forme toujours un nombre fini d'intervalles pouvant d'ailleurs se réduire à un point.

Soit maintenant un système de $n+1$ fonctions de la classe (b)

$$(1) \quad f_1, f_2, \dots, f_n$$

linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'une égalité telle que

$$(2) \quad P = c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$$

$c_0, c_1, \dots, c_n$ étant des constantes, ne peut avoir lieu partout dans (a, b) que si

$$c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0.$$

Remarquons que le système (1) peut n'être pas linéairement indépendant dans un intervalle (α, β) intérieur à (a, b) [tel que $|a - \alpha| + |\beta - b| \neq 0$].

Toute expression linéaire et homogène telle que (2) sera appelée *un polynome* du système (1). A tout polynome P nous pouvons faire correspondre un point M de coordonnées $c_0, c_1, \dots, c_n$ dans l'espace ordinaire à $n+1$ dimensions. Nous appelons le point M , *l'image* du polynome P correspondant.

Le fait que les fonctions (1) sont linéairement indépendantes peut s'exprimer de la façon suivante:

Il y a correspondance biunivoque entre les polynomes P et leurs images M .

est un système minimisant, les systèmes

$$c_i = c_i^* + \lambda c_i \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

seront aussi minimisants, λ étant quelconque.

Maintenant si f est une fonction continue prenant les valeurs a_i aux points $x_i (i=1, 2, \dots, n+1)$, on aura pour tout polynome Q

$$\text{Max} |f - Q| \geq m \quad [\text{dans } (a, b)].$$

Posons

$$P^* = c_0^* f_0 + c_1^* f_1 + \dots + c_n^* f_n$$

[on peut d'ailleurs avoir $P^* \equiv 0$].

Pour fixer les idées, supposons que le polynome P pris initialement, s'annule en un nombre fini de points; ce sont d'abord les points $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, et puis certains autres points $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$ (qui peuvent ne pas exister du tout).

Prenons la fonction f telle que:

$$(9) \quad f(x_i) = P^*(x_i) - a_i \quad i=1, 2, \dots, n+1$$

$$(10) \quad f(x'_i) = 0 \quad i=1, 2, \dots, r.$$

Les points x_i, x'_i partagent l'intervalle (a, b) en un certain nombre de sous-intervalles $(n+r, n+r+1$ ou $n+r+2)$ tels que dans chacun d'eux le polynome P garde un signe constant.

Soit

$$\text{Max}_{(a,b)} |P| = A$$

Prenons

$$0 > \lambda > -\frac{m}{A}$$

alors

$$|\lambda P| < m$$

Nous déterminons f dans chaque sous-intervalle tel qu'il soit continu et tel que (9) et (10) soient vérifiés. Pour cela nous allons examiner les diverses sortes de sous-intervalles qui peuvent se présenter.

1°. Intervalle (a, x'_1) . Dans un tel intervalle on prendra

$$f = \frac{m}{2A} P$$

alors dans (a, x'_1)

$$\lambda < 0, \quad |f - \lambda P| = |f| + |\lambda P| = \left\{ \frac{m}{2A} + |\lambda| \right\} |P|$$

et

$$|f - \lambda P| < m$$

pourvu que

$$-\frac{m}{2A} < \lambda < 0$$

On emploie la même construction pour un intervalle (x'_r, b) .

2°. Intervalle (a, x_1) [ou (x_{n+1}, b)]. On a

$$|P^*(x_1) - a_1| \leq m.$$

On prendra dans (a, x_1)

$$f = P^*(x_1) - a_1 - \frac{m}{A} P \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] > 0$$

$$f = P^*(x_1) - a_1 \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] < 0$$

on voit alors que

$$(11) \quad \text{Max} |f + \lambda P| \leq m$$

pourvu que

$$(12) \quad 0 > \lambda > -\frac{m}{A}$$

3°. Intervalle (x_1, x'_1) .

On peut prendre

$$f = (x - x'_1) \frac{P^*(x_1) - a_1}{x_1 - x'_1} - \frac{m}{A} P \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] > 0$$

$$f = (x - x'_1) \frac{P^*(x_1) - a_1}{x_1 - x'_1}, \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] < 0$$

et on a encore (11) sous les conditions (12).

4°. Intervalle (x'_1, x'_2) . Il suffit de prendre

$$f = -\frac{m}{A} P.$$

et (11) sera satisfait avec (12).

5°. Intervalle (x_1, x_2) . Posons

$$g = \frac{x[P^*(x_1) - a_1 - P^*(x_2) + a_2] + x_2[P^*(x_1) - a_1] - x_1[P^*(x_2) - a_2]}{x_1 - x_2}$$

Nous posons alors

$$f = g - \frac{m}{A} P \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] > 0, P[P^*(x_2) - a_2] > 0$$

$$\text{ou bien si } [P^*(x_1) - a_1][P^*(x_2) - a_2] < 0$$

$$f = g \quad \text{si } P[P^*(x_1) - a_1] > 0, P[P^*(x_2) - a_2] < 0.$$

On peut déterminer encore un $\lambda_1 > 0$ tel que si

$$0 > \lambda > -\lambda_1$$

on ait encore

$$\max |f - \lambda P| \leq m$$

dans l'intervalle (x_1, x_2) .

Cette propriété résulte de la remarque suivante :

Soit $g(x)$ une fonction continue dans $(0,1)$ (nous prenons l'intervalle $(0,1)$ pour simplifier l'exposé) positive (négative) dans cet intervalle et

$$g(0) = g(1) = 1$$

Soient, pour fixer les idées, $a' > 0$, $b' < 0$. On peut alors déterminer un $\lambda_1 > 0$ tel que pour $0 < \lambda < \lambda_1$ on ait

$$a' + x(b' - a') + \lambda g < a$$

dans $(0,1)$. La démonstration est immédiate.

La fonction f ainsi construite répond à la question, car λ étant compris entre

$$0, -\lambda_1$$

où λ_1 est un nombre positif, on a

$$|f - \lambda P| \leq m$$

dans (a, b) et au moins dans un point x_i on a l'égalité

$$|f - \lambda P| = m.$$

D'autre part, n'importe quel autre polynome donne

$$|f - Q| \geq m.$$

5. Si P s'annulait dans tout un intervalle (α, β) par exemple, on pourrait encore faire la construction très facilement. Les points $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ peuvent être pris à l'intérieur de (α, β) . Alors en dehors de (α, β) nous faisons la même construction que toute à l'heure. Dans (α, β) nous gardons encore les conditions (9); et dans chaque intervalle x_i, x_{i+1} nous prenons la fonction f linéaire; et constante dans (α, x_1) et (x_{n+1}, β) . La fonction ainsi obtenue répond encore à la question.