Fasc. 6

BULLETIN DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE

PURES ET APPLIQUÉES

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE „ROI CAROL II"

BUCAREST

IIème ANNÉE (1931—1932). No. 3

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1931

GÉOMÉTRIE. — *Sur une remarque de M. D. Pompeiu*

par M. D. V. JONESCO

M. POMPEIU a donné recemment dans le *Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Bucarest*[1]) un très interessant théorème de géomètrie élémentaire.

En suivant l'idée qui se dégage de la note de M. POMPEIU, je suis parvenu a énoncer d'autres théorèmes de géomètrie que je présente dans cette note.

1. Considérons deux triangles ABC , A'B'C' directement semblables et désignons par z_1, z_2, z_3 et z'_1 z'_2 z'_3 les affixes de leurs sommets. Nous avons

$$z'_1 (z_2 - z_3) + z'_2 (z_3 - z_1) + z'_3 (z_1 - z_2) = 0.$$

Il résulte alors que le triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets ont pour affixes

$$Z_1 = az_1 + bz'_1 + c$$
$$Z_2 = az_2 + bz'_2 + c$$
$$Z_3 = az_3 + bz'_3 + c,$$

est semblable aux triangles ABC , A'B'C'.

En donnant des valeurs particulières aux coefficients *a, b, c,* réels ou complexes, on obtient des théorèmes interessants de géomètrie élémentaire.

2. *Prenons par exemple un point fixe* O *et soient* A_1, B_1, C_1 *les sommets d'un troisième triangle que nous avons pris de façon que les quadrilatères* OAA_1A', OBB_1B', OCC_1C' *soient des parallélogrammes. Le triangle* $A_1B_1C_1$ *est semblable aux triangles* ABC *et* A'B'C'.

En effet les affixes des points $A_1B_1C_1$ sont

$$Z_1 = z_1 + z'_1 \quad , \quad Z_2 = z_2 + z'_2 \quad , \quad Z_3 = z_3 + z'_3.$$

Ce théorème est du à M. POMPEIU.

3. *Soient* ABC, A'B'C' *deux triangles directement semblables et* O *un point fixe. Par les sommets* A', B', C' *nous menons les vecteurs* $\overrightarrow{A'A_1}$, $\overrightarrow{B'B_1}$, $\overrightarrow{C'C_1}$

$$\overrightarrow{A'A_1} = k . \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{B'B_1} = k . \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{C'C_1} = k . \overrightarrow{OC},$$

k étant un nombre réel. Le triangle $A_1B_1C_1$ *est directement semblable aux triangles* ABC *et* A'B'C'.

---

[1]) M. D. POMPEIU „Remarque sur la note de M. TEODORIU". Bulletin de Mathématiques et de physique de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, 1ère année page 161.

En effet, si nous prenons le point O comme origine et si nous désignons par z_1 , z_2 , z_3 ; z'_1 , z'_2 , z'_3 ; Z_1 , Z_2 , Z_3 les affixes des sommets des triangles ABC , A'B'C' , $A_1B_1C_1$ nous avons

$$Z_1 = z'_1 + kz_1$$
$$Z_2 = z'_2 + kz_2$$
$$Z_3 = z'_3 + kz_3.$$

Ce théorème est une généralisation du théorème de M. Pompeiu. En effet pour avoir le théorème de M. Pompeiu, il faut faire la même construction, on prend seulement $k = 1$.

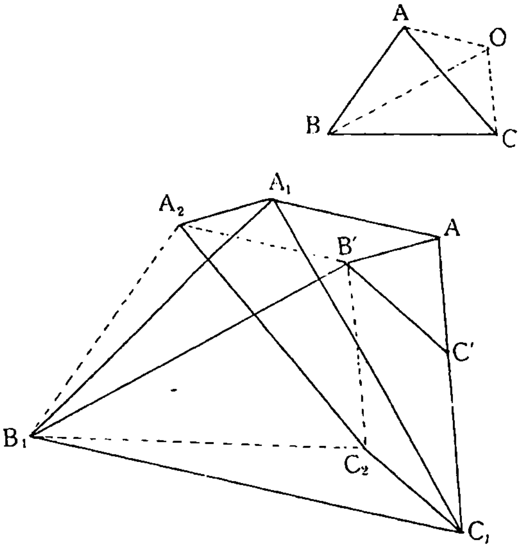

Fig. 1.

4. Il n'est pas sans interêt, je crois, de donner une démonstration élémentaire de ce théorème

Menons par B' les vecteurs $\overrightarrow{B'A_2}$, $\overrightarrow{B'C_2}$ égaux et parallèles aux vecteurs $\overrightarrow{A'A_1}$ et $\overrightarrow{C'C_1}$.

Le triangle $A_2B_1C_2$ est semblable au triangle ABC et nous avons

$$\frac{B_1C_2}{B_1A_2} = \frac{BC}{BA}\cdot$$

Mais

$$C_2C_1 = B'C',$$

et

$$A_1A_2 = A'B',$$

de sorte que

$$\frac{C_2C_1}{A_2A_1} = \frac{BC}{BA}.$$

Il résulte alors que

(1) $$\frac{B_1C_2}{B_1A_2} = \frac{C_2C_1}{A_2A_1}.$$

D'autre part remarquons que l'angle $A_1A_2B_1$ est égal à l'angle que fait $\overrightarrow{B'A'}$ avec $\overrightarrow{AB}$, c'est à dire

$$\sphericalangle A_1A_2B_1 = \sphericalangle (\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{AB}).$$

De même on a

$$\sphericalangle C_1C_2B_1 = \sphericalangle (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{CB}).$$

La figure formée par les droites BA, BC, $B'A'$, $B'C'$ est un quadrilatère inscriptible, et nous avons

$$\sphericalangle (\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{AB}) = \sphericalangle (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{CB}).$$

Donc

(2) $$\sphericalangle A_1A_2B_1 = \sphericalangle C_1C_2B_1.$$

Les égalités (1) et (2) montrent que les triangles $B_1A_2A_1$, $B_1C_2C_1$ sont semblables et on remarque ensuite que les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_1C_2$ sont semblables parceque

$$\frac{B_1A_1}{B_1C_1} = \frac{B_1A_2}{B_1C_2} = \frac{BA}{BC}$$

et que les angles $A_1B_1C_1$, $A_2B\,C_2$ sont égaux.

Nous avons ainsi démontré que les triangles $A_1B_1C_1$ et ABC sont semblables.

5. Considérons le triangle $A_2B_2C_2$ obtenu de la même manière que le triangle $A_1B_1C_1$, en remplaçant seulement k par k'. Le triangle $A_2B_2C_2$ est semblable au triangle $A_1B_1C_1$.

Remarquons que

$$\frac{A'A_2}{A'A_1} = \frac{B'B_2}{BB_1} = \frac{C'C_2}{CC_1} = \frac{k'}{k}.$$

On démontre le théorème suivant qui est du à VAN AUBEL[1])

Etant donnés deux triangles directement semblables $A_1B_1C_1$ *et* $A'B'C'$, *le triangle* $A_2B_2C_2$ *dont les sommets divisent dans le même rapport les segments* A_1A', B_1B', C_1C', *est semblable au triangle* $A'B'C'$.

6. *Considérons deux triangles directement semblables* ABC *et* A'B'C'. *Nous allons faire la rotation des vecteurs* $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ *d'un même*

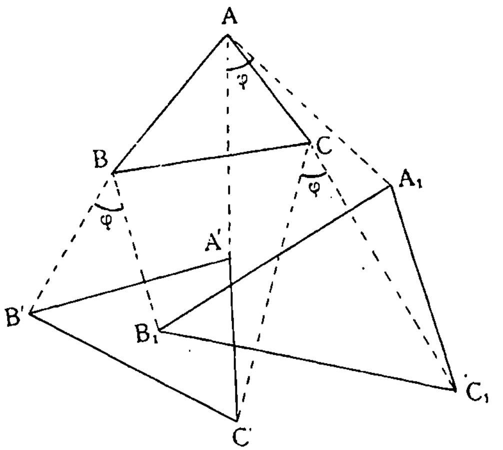

Fig. 2.

angle φ *autour de* A, B, C. *Le nouveau triangle* $A_1B_1C_1$ *est directement semblable aux triangles* ABC *et* A'B'C'.

En effet en désignant par z_1, z_2, z_3 ; z'_1, z'_2, z'_3 ; Z_1, Z_2, Z_3 les affixes des points A, B, C ; A', B', C' ; A_1, B_1, C_1, nous avons

$$Z_1 - z_1 = (z'_1 - z_1)\, e^{i\varphi}.$$

Donc

$$Z_1 = (1 - e^{i\varphi})\, z_1 + e^{i\varphi} z'_1$$

$$Z_2 = (1 - e^{i\varphi})\, z_2 + e^{i\varphi} z'_2$$

$$Z_3 = (1 - e^{i\varphi})\, z_3 + e^{i\varphi} z'_3,$$

[1]) Voir MATHESIS 1881 p. 106.

ce qui prouve que le triangle $A_1B_1C_1$ est directement semblable aux triangles ABC et A'B'C'.

Nous allons maintenant donner la démonstration élémentaire de ce théorème. Mais auparavant nous allons démontrer un théorème auxiliaire.

7. Considérons un parallélogramme ABCD et deux points fixes O et O'. Nous allons faire la rotation des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ autour du point O, dans le même sens et d'un même angle φ. De même nous allons faire la rotation des vecteurs $\overrightarrow{O'C}$ et $\overrightarrow{O'D}$ autour du point O', dans le même sens que précé-

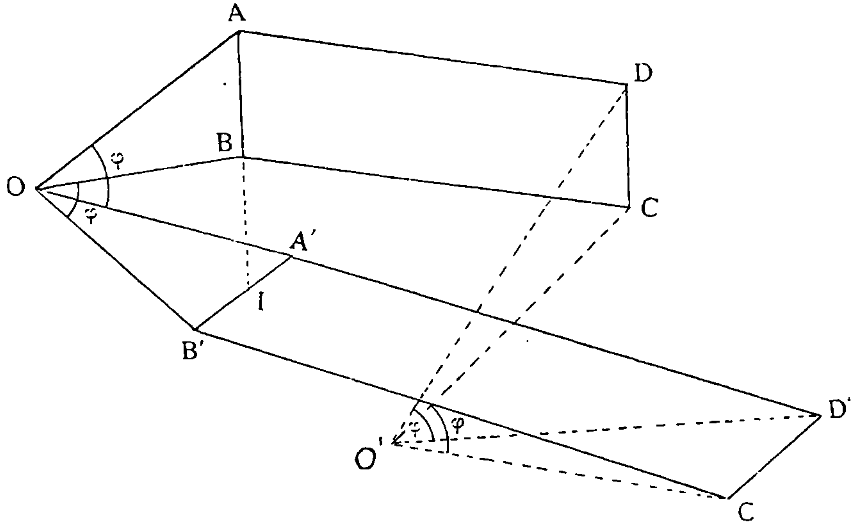

Fig. 3.

demment et toujours du même angle φ. *La nouvelle figure* A'B'C'D' *est un parallélogramme.*

En effet les deux triangles OAB , OA'B' sont égaux et par suite A'B' = AB. De même on démontre que C'D' = CD, et par suite A'B' = C'D'.

Soit I l'intersection de AB et de A'B'. Les angles OAB , OA'B' étant égaux, le quadrilatère OAA'I est inscriptible et par suite l'angle AIA' est égal à φ. On démontre aussi que l'angle que fait CD avec C'D' est égal à φ, et par suite les droites A'B' , C'D' sont parallèles.

Il résulte alors que la figure A'B'C'D' est un parallélogramme.

8. Maintenant nous pouvons faire la démonstration du théorème énoncé au No. 6.

Par le point B menons BA″ égal et parallèle à B′A′ et ensuite BC″ égal et parallèle à B′C′.

Faisons la rotation du vecteur $\overrightarrow{AA''}$ de l'angle φ autour du point A et soit A_2 le point ainsi obtenu. De même faisons la rotation du vecteur $\overrightarrow{CC''}$ autour du point C, d'un angle φ, et soit C_2 le point ainsi obtenu.

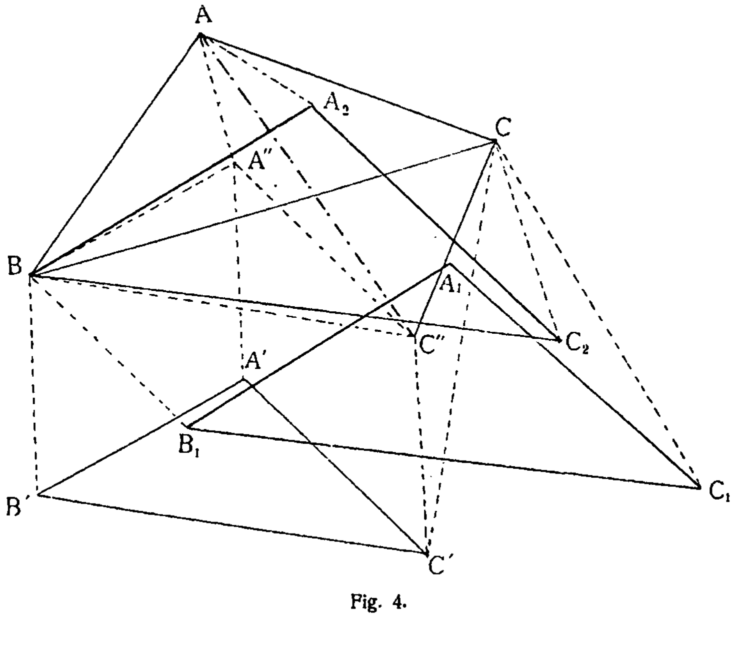

Fig. 4.

D'après le théorème du No. 7, il résulte que les figures $BB_1A_1A_2$, $BB_1C_1C_2$ sont des parallélogrammes. Les triangles $A_1B_1C_1$, A_2BC_2 sont donc égaux et pour finir la démonstration il suffira de prouver que les triangles ABC , A_2BC_2 sont semblables.

Les triangles BAC , BA″C″ sont semblables. On voit sans peine que les triangles ABA″ , CBC″ sont semblables et par suite les triangles ABA_2 , CBC_2 sont aussi semblables. Il résulte alors que les triangles BAC, BA_2C_2 sont semblables et le théorème est démontré.

9. Pour finir faisons encore une remarque qui nous conduira à un théorème de géométrie élémentaire.

Considérons le triangle ABC dont les sommets ont pour affixes z_1, z_2, z_3 et nous construisons le triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets ont pour affixes

$$Z_1 = \frac{1}{z_2 z_3}\ ,\quad Z_2 = \frac{1}{z_3 z_1}\ ,\quad Z_3 = \frac{1}{z_1 z_2}\ .$$

Ces deux triangles sont directement semblables.

En effet ona :

$$Z_1\,(z_2 - z_3) + Z_2\,(z_3 - z_1) + Z_3\,(z_1 - z_2) = 0.$$

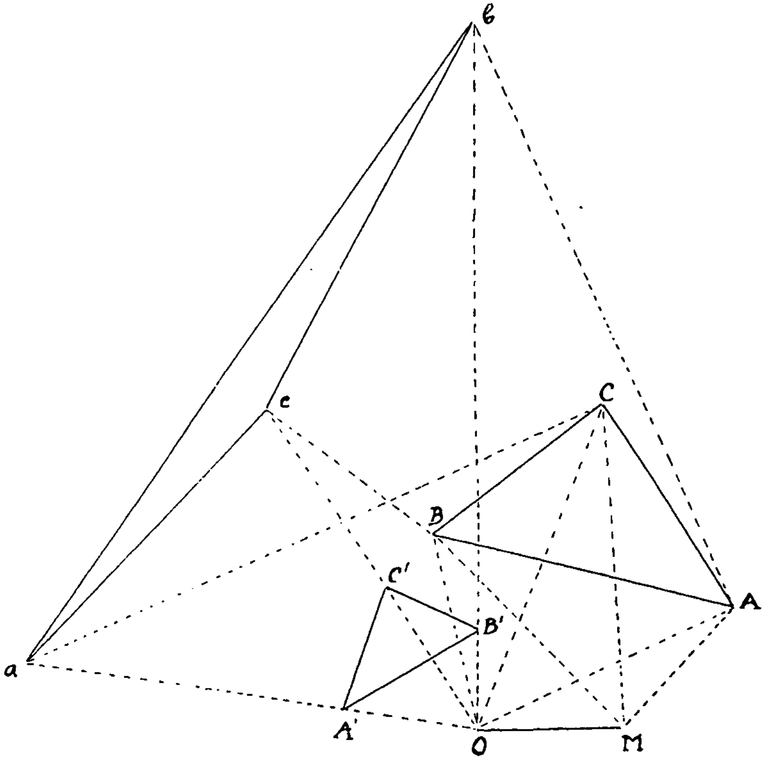

Fig. 5.

Cette remarque nous conduit au théorème suivant.

Considérons le triangle ABC et deux points fixes O et M. Nous allons construire les triangles OB*c* , OC*a* , OA*b* respectivement semblables aux triangles OMA , OMB et OMC. Soient A′ , B′ , C′ les inverses des points *a* , *b* , *c* par rapport au point O, la puissance d'inversion étant quelconque. Les triangles ABC , A′B′C′ sont inversement semblables.

En effet le symétrique du triangle $A'B'C'$ par rapport à OM, est justement le triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets ont pour affixes Z_1 , Z_2 , Z_3.

Nous allons donner aussi une démonstration élémentaire de ce théorème.

Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} \sphericalangle A'OB' &= \sphericalangle COa - (\sphericalangle AOb - \sphericalangle AOC) \\ &= \sphericalangle MOB - (\sphericalangle MOC - \sphericalangle AOC) \\ &= \sphericalangle MOB - \sphericalangle MOA, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\sphericalangle A'OB' = \sphericalangle AOB.$$

D'autre part, nous avons :

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{k}{Oa} : \frac{k}{Ob} = \frac{Ob}{Oa} = \frac{Ob}{Oc} \cdot \frac{Oc}{Oa} = \frac{OA}{OM} \cdot \frac{OM}{OB} = \frac{OA}{OB} \cdot$$

Il résulte alors que les deux triangles $OA'B'$ OAB sont inversement semblables.

On démontre aussi que les triangles $OB'C'$, OBC sont inversement semblables, d'ou résulte immédiatement que les triangles $A'B'C'$, ABC sont inversement semblables.

Manuscrit reçu le 1 Novembre 1930.