P. 557

BULLETIN SCIENTIFIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

TIMIȘOARA

COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE LA
„SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE TIMIȘOARA"

TOME 4. FASC. 1—2.

SEMINARUL DE MATEMATICI CLUJ

BCU Cluj-Napoca
PMATE 2014 00832

SEMINARUL DE MATEMATICI CLUJ

Inv. P. 701

TIMIȘOARA
„IMPRIMERIE TIPOGRAFIA ROMÂNEASCĂ"
1 9 3 1

UN PROBLÈME DE GÉOMÈTRIE DIFFÉRENTIELLE

PAR

M. D. V. JONESCO

PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLUJ

1. Considérons une courbe plane (C) du plan $x\,O\,y$, qui rencontre l'axe $O\,x$ au point A. En un point M quelconque de la courbe, nous menons la tangente, qui rencontre l'axe $O\,x$ au point T.

Nous nous proposons de déterminer les courbes (C), *pour lesquelles, l'arc* A M *est proportionnel à la longueur de la tangente* M T, c'est à dire

$$\text{arc}\, A\, M = \lambda \,.\, M\, T$$

λ étant un nombre positif supérieur à 1.

L'arc A M est donné par la formule

$$\text{arc}\, A\, M = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\, d\, x\,,$$

a étant l'abscisse du point A.

D'autre part, la longueur M T est donnée par la formule

$$M\, T = \frac{y \sqrt{1 + y'^2}}{y'}.$$

Il résulte que l'équation du problème est

$$\int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\, d\, x = \lambda \frac{y \sqrt{1 + y'^2}}{y'},$$

ou, en dérivant par rapport à x, nous avons

$$\sqrt{1 + y'^2} = \lambda \left(\frac{y \sqrt{1 + y'^2}}{y'} \right)',$$

c'est à dire

(1)
$$\lambda\, y\, y'' = (\lambda - 1)\, y'^2 (1 + y'^2).$$

2. Il faut maintenant trouver l'intégrale de l'équation différentielle (1) qui s'annule pour $x = a$. En introduisant le paramètre u défini par

(2)
$$y' = \text{tg}\, \frac{u}{2}\,,$$

on est conduit à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{y} = \frac{\lambda}{2(\lambda-1)} \operatorname{cotg} \frac{u}{2}\, du,$$

qui s'intègre immédiatement.

On trouve finalement que l'intégrale de l'équation (1) est donnée par les formules

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{C\lambda}{2(\lambda-1)} \int \cos^2 \frac{u}{2} \sin^{\frac{\lambda}{\lambda-1}-2} \frac{u}{2}\, du + C' \\ y &= C \sin^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \frac{u}{2} \end{aligned}$$

C et C′ étant deux constantes arbitraires.

Il faut maintenant déterminer les constantes C et C′ de façon que y s'annule pour $x = a$. On voit sans peine que cette intégrale est donnée par les formules

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= a + \frac{C\lambda}{2(\lambda-1)} \int_o^u \sin^{\frac{\lambda}{\lambda-1}-2} \frac{u}{2} \cos^2 \frac{u}{2}\, du \\ y &= C \sin^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \frac{u}{2} \end{aligned}$$

Toutes les courbes (C), pour un λ donné, sont homothétiques par rapport au point de coordonnées $(a, 0)$, le rapport d'homothétie étant la constante C. L'équation différentielle (1) montre que y et y'' sont du même signe. Donc si $y > 0$, la courbe tourne la concavité vers l'axe O y. On remarque aussi que la courbe (C) est tangente à l'axe O x au point d'abscisse a.

La forme de l'équation différentielle (1) permet aussi de donner une expression simple du rayon de courbure. Désignons par P le point où la perpendiculaire à O x menée par M rencontre la perpendiculaire à M T menée par T. Nous allons démontrer que le rayon de courbure R est donné par la formule

$$(5) \qquad R = \frac{\lambda}{\lambda-1}\, T P.$$

En effet le rayon de courbure est donné par la formule

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Si nous tenons compte de l'équation différentielle (1), nous avons

$$R = \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'^2}$$

Mais nous avons vu que

$$MT = \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

de sorte que

$$R = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\frac{MT}{y'}$$

Mais dans le triangle MTP, nous avons

$$MT = TP \operatorname{tg} \widehat{TPM} = y' . TP,$$

et par suite

$$R = \frac{\lambda}{\lambda - 1} TP.$$

La formule (5) est donc démontrée.

3. Disons toute de suite que pour $\lambda = \frac{3}{2}$ la courbe (C) est une hypocycloïde à quatre rebroussements et pour $\lambda = 2$, la courbe (C) est une cycloïde.

En effet faisons dans les formules (4), $\lambda = \frac{3}{2}$, on obtient immédiatement les équations

$$x = a + C - C\cos^3\frac{u}{2}$$

$$y = C\sin^3\frac{u}{2}$$

qui sont les équations paramétriques d'une hypocycloïde à quatre rebroussements.

De même si nous faisons $\lambda = 2$ dans les formules (4), nous obtenons les équations

$$x = a + \frac{C}{2}(u + \sin u)$$

$$y = \frac{C}{2}(1 - \cos u),$$

qui sont les équations paramétriques d'une cycloïde.

4. Mais les courbes (C), définies dans le No. 1 jouissent encore d'autres propriétés remarquables que nous allons mettre en évidence.

Imaginons qu'on distribue sur la courbe (C) une masse avec la densité y^n, n étant un nombre donné.

La masse M de l'arc A M, est égale à

$$M = \int_a^x y^n\, ds = \int_a^x y^n \sqrt{1+y'^2}\, dx \tag{6}$$

De même sur le segment M T, distribuons une masse avec la densité Y", Y étant la côte d'un point quelconque de M T. La masse totale distribué sur M T est égale à

$$M_1 = \int_{MT} Y^n \, d\,s\,.$$

Mais les équations de la tangente M T étant

$$\frac{Y-y}{y'} = \frac{X-x}{1} = t\,,$$

les coordonnées d'un point quelconque de M T, sont

$$X = x + t\,, \quad Y = y + t\,y'\,.$$

Le point de coordonnées (X, Y) décrit le segment M T lorsque t varie de $-\dfrac{y}{y'}$ à 0. La masse M_1 est donc

$$M_1 = \int_{-\frac{y}{y'}}^{0} (y + t\,y')^n \sqrt{1+y'^2}\, d\,t$$

En intégrant, on a

$$M_1 = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} \left[\frac{(y + t\,y')^{n+1}}{n+1} \right]_{-\frac{y}{y'}}^{0}\,,$$

c'est à dire

(7) $$M_1 = \frac{y^{n+1}\sqrt{1+y'^2}}{(n+1)\,y'}$$

Cherchons maintenant les courbes (Γ) pour lesquelles on a

(8) $$M = \mu\, M_1\,,$$

μ étant un nombre positif.

L'équation du problème sera

$$\int_a^x y^n \sqrt{1+y'^2}\, d\,x = \mu \frac{y^{n+1}\sqrt{1+y'^2}}{(n+1)\,y'}$$

ou bien, en dérivant par rapport à x, nous aurons

$$y^n \sqrt{1+y'^2} = \frac{\mu}{n+1} \left(\frac{y^{n+1}\sqrt{1+y'^2}}{y'} \right)'$$

Un calcul simple donne

$$\left(\frac{y^{n+1}\sqrt{1+y'^2}}{y'} \right)' = \frac{(n+1)\,y'^2\,(1+y'^2) - y\,y''}{y'^2\sqrt{1+y'^2}}\, y^n\,,$$

et par suite l'équation différentielle du problème est

(9) $$\frac{\mu}{\mu-1}\, y\, y'' = (n+1)\, y'^2 (1+y'^2)$$

Cette équation a la même forme que l'équation différentielle (1). De ce fait nous allons tirer des conclusions importantes.

5. Il résulte que les courbes (C) du No 1, jouissent de la propriété exprimé par la formule (8), pour une certaine valeur de μ. Cette valeur est donnée par l'équation

$$\frac{\mu}{(n+1)\lambda} = \frac{\mu-1}{\lambda-1} = \frac{1}{n\lambda+1}$$

c'est à dire

$$\mu = \frac{(n+1)\lambda}{1+n\lambda}.$$

Les courbes (C) jouissent donc de la propriété exprimée par

(10) $$M = \frac{(n+1)\lambda}{1+n\lambda}\, M_1 .$$

On peut encore écrire cette équation sous la forme suivante

(11) $$\int_a^x y^n \sqrt{1+y'^2}\, dx = \frac{\lambda}{1+n\lambda}\, \frac{y^{n+1}\sqrt{1+y'^2}}{y'}$$

6. Déterminons maintenant la côte η_n du centre de gravité de la masse M distribué le long de AM avec la densité y^n. Cette côte est donné par la formule

$$\eta_n = \frac{\int_a^x y^{n+1}\sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int_a^x y^n\sqrt{1+y'^2}\, dx}$$

La formule (11) est vraie quel que soit n.

Nous pouvons l'appliquer pour calculer η_n. On trouve

$$\eta_n = \frac{\lambda}{1+(n+1)\lambda}\, \frac{y^{n+2}\sqrt{1+y'^2}}{y'}\, \frac{1+n\lambda}{\lambda}\, \frac{y'}{y^{n+1}\sqrt{1+y'^2}},$$

c'est à dire

(12) $$\eta_n = \frac{1+n\lambda}{1+(n+1)\lambda}\, y .$$

La côte du centre de gravité est donc proportionnelle à y.

En particulier la côte du centre de gravité de l'arc AM de la courbe (C), $(n=0)$ est

(13) $$\eta_0 = \frac{1}{1+\lambda}\, y .$$

Pour l'hypocycloïde à quatre rebroussements $\left(\lambda = \frac{3}{2}\right)$, cette côte est $\frac{2}{5}\, y$ et pour la cycloïde $(\lambda = 2)$ on a $\eta_0 = \frac{y}{3}$.

7. Déterminons aussi le moment d'inertie de la masse M distribuée le long de l'arc AM de la courbe (C), avec la densité y^n. Il sera donné par la formule

$$\mathrm{I} = \int_a^x y^{n+2} \sqrt{1 + y'^2}\, d\,x\,.$$

En appliquant la formule (10) oú l'on remplace n par $n + 2$, nons déduisons que le moment d'inertie de la masse M de l'arc AM est proportionnel au moment d'inertie I_1 du segment MT. D'une façon précise nous avons

$$\mathrm{I} = \frac{(n+3)\,\lambda}{1 + (n+2)\,\lambda}\, \mathrm{I}_1\,.$$

Le rayon de gyration k, est donné par la formule

$$k^2 = \frac{\int_a^x y^{n+2} \sqrt{1 + y'^2}\, d\,x}{\int_a^x y^n \sqrt{1 + y'^2}\, d\,x}\,.$$

En appliquant la formule (11), nous aurons

$$k^2 = \frac{\lambda}{1 + (n+2)\,\lambda}\, \frac{y^{n+3} \sqrt{1 + y'^2}}{y'} \cdot \frac{1 + n\,\lambda}{\lambda}\, \frac{y'}{y^{n+1} \sqrt{1 + y'^2}}\,.$$

Donc

$$k^2 = \frac{1 + n\,\lambda}{1 + (n+2)\,\lambda}\, y^2\,,$$

c'est à dire que le rayon de gyration est proportionnel à y.

En particulier le rayon de gyration de l'arc AM de la courbe (C), $(n = 0)$ est

$$k_0 = \frac{y}{\sqrt{1 + 2\lambda}}\,.$$

Pour l'yhypocycloïde à quatre rebroussements $\left(\lambda = \frac{3}{2}\right)$ on a $k_0 = \frac{y}{2}$, et pour la cycloïde $(\lambda = 2)$, on a $k_0 = \frac{y}{\sqrt{5}}$.

8. Pour finir démontrons que l'aire de la surface décrite par l'arc AM dans une rotation de 2π autour de l'axe $\mathrm{O}\,x$ est proportionnelle à l'aire décrite par le segment MT dans cette rotation.

En effet, cette aire sera donnée par la formule de *Guldin*

$$A = 2\,\pi\,\eta_0\,(\text{arc } A\,M).$$

Mais

$$\text{arc } A\,M = \lambda\,.\,M\,T\,,$$

et η_0 est donné par la formule (13). Nous avons donc

$$A = \frac{2\,\pi\,\lambda}{1+\lambda}\,y\,.\,M\,T$$

Mais $\pi\,y\,.\,M\,T$ représente l'aire A_1, décrite par le segment M T. Nous avons donc

$$A = \frac{2\,\lambda}{1+\lambda}\,A_1$$

Pour l'hypocycloïde à quatre rebroussements $(\lambda = \frac{3}{2})$ on $A = \frac{6}{5}A_1$, et pour la cycloïde $(\lambda = 2)$, on a $A = \frac{4}{3}A_1$.