MATHEMATICA

VOLUMUL V.

1 9 3 1

C L U J

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL", STR. MEMORANDULUI 22

1 9 3 1

TABLE DES MATIÈRES.

SUR LES SUITES DE POLYNOMES

par

T. Popoviciu

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de Paris

Reçue le 4 décembre 1930.

M. R. LAGRANGE dans un mémoire paru dans les „Acta Mathematica" [1] a etudié les suites de nombres d'un point de vue algébrique. Il en a fait des applications pour certaines suites de polynomes. Dans le présent travail, nous allons compléter „l'algèbre des suites de nombres" par une „algèbre des suites de polynomes". Nous aborderons dans d'autres mémoires les applications.

Nous ne donnons que des définitions et des résultats. Les démonstrations conduisent souvent à des calculs un peu longs mais ne présentant aucune difficulté.

1. *Définition d'une suite de polynomes.* Considérons une suite de polynomes en x

$$P_0,\ P_1,\ \ldots\ P_n,\ \ldots \tag{1}$$

pris dans un ordre bien déterminé. Cet ordre est caractérisé par le nombre n qui est *l'indice* ou *le rang* du polynome P_n. Désignons par $p(n)$ le degré du polynome P_n. Si P_n est identiquement nul, nous supposons que $p(n)$ a une valeur négative *aussi grande qu'on veut*. La différence

$$p(n)-n \tag{2}$$

est *l'ordre* du polynome P_n. Si $p(n)<0$, donc si P_n est identiquement nul nous disons qu'il est d'ordre $-\infty$.

Si les ordres de tous les éléments d'une suite sont égaux à $-\infty$, nous disons que cette suite est *la suite nulle.* Pour toutes les autres suites les ordres des éléments ont une limite supérieure m finie ou infinie. Si m est fini nous disons que la suite est *d'ordre fini m.* Dans

[1] R. LAGRANGE. „Mémoire sur les suites de polynomes" Acta Math. 51 (1928), p. 201.

ce cas la suite (1) possède au moins un élément d'ordre m. Nous appelons *indice caractéristique* la plus petite valeur de n pour lequel

$$p(n)-n=m.$$

Nous disons qu'une suite est *complète* si tous ses éléments ont même ordre. Une suite complète est nécessairement d'ordre fini et son indice caractéristique est 0.

Si m est infini la suite est *d'ordre infini.* Une telle suite ne peut pas être complète et n'admet pas d'indice caractéristique. Nous appelons *classe* de la suite (1) le nombre k tel que

$$p(0)<0,\quad p(1)<0,\ldots\quad p(k-1)<0,\quad p(k)\geqslant 0.$$

Une suite d'ordre négatif m est au moins de classe $-m$.

Nous posons

$$\binom{i}{j}=\frac{i(i-1)\ldots(i-j+1)}{1.2.3\ldots j}\quad;\quad \binom{i}{j}=0,\ j>i.$$

Les accents désignant des dérivées, nous disons qu'une suite de classe k et d'ordre $-k$ est *normale* si

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}P_{k+j}^{(j)}\neq 0 \tag{3}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

On voit que les premiers membres sont des nombres.

Nous désignons par [P] la suite (1). Lorsqu'on envisage plusieurs suites [P], [Q], ... on désigne par $p(n)$, $q(n)$, ... le degré des polynomes P_n, Q_n, ...

Toutes les relations que nous écrivons entre plusieurs polynomes sont vérifiées identiquement par rapport à x.

2. *L'algèbre des suites de polynomes.* 1°. Nous désignons par [0] la suite nulle.

2°. La suite

$$P_0=1;\quad P_n=0,\ n>0$$

est la suite *unité* et sera designée par [1]. Elle est normale et de classe 0.

La suite

$$P_k=1,\quad P_n=0,\quad n\neq k$$

est *la suite unité de classe k*, $[1]_k$.

3°. Deux suites [P], [Q] sont *égales* si, et seulement si

$$P_n=Q_n$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

Nous écrivons

$$[\mathrm{P}]=[\mathrm{Q}]$$

4⁰. Le produit d'une suite [P] par un nombre λ est par définition une nouvelle suite [Q] donnée par

$$\mathrm{Q}_n=\lambda\,\mathrm{P}_n$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Nous écrivons

$$\lambda\,.\,[\mathrm{P}]=[\lambda\,\mathrm{P}]$$

$-$P] est la suite *opposée* de [P] et est égale à $-$[P].

5⁰. La *somme* de deux suites [P], [Q] est une nouvelle suite [R] définie par

$$\mathrm{R}_n=\mathrm{P}_n+\mathrm{Q}_n$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Nous écrivons

$$[\mathrm{P}]+[\mathrm{Q}]=[\mathrm{R}]\,.$$

6⁰. Le *produit élémentaire* de [P] par [Q] est une nouvelle suite [R] définie par les égalités

$$\mathrm{R}_n=\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{Q}_i\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}\mathrm{P}_{n-j}^{(i-j)}\right],\quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{4}$$

On vérifie facilement que le second membre contient un nombre fini de termes. Pour les suites d'ordre négatif ou nul nous pouvons écrire les formules condensées

$$\mathrm{R}_n=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{Q}\left[\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\mathrm{P}_{n-j}^{(i-j)}\right],\quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{5}$$

Nous écrivons

$$[\mathrm{Q}]\,.\,[\mathrm{P}]=[\mathrm{R}]\,.$$

Les définitions 4⁰, 5⁰ permettent de trouver la *différence* de deux suites.

L'égalité et l'addition des suites jouit de toutes les propriétés de l'égalité et de l'addition ordinaire.

La multiplication élémentaire est associative et distributive par rapport à l'addition mais elle n'est pas en général commutative. Si

$$[\mathrm{Q}]\,.\,[\mathrm{P}]=[\mathrm{P}]\,.\,[\mathrm{Q}]$$

nous disons que les suites [P], [Q] sont *permutables.* La suite unité est permutable avec une suite quelconque.

La multiplication par un nombre non nul ne change pas l'ordre, la classe, la normalité et la permutabilité d'une suite.

L'ordre d'une somme est au plus égal au plus grand des ordres des suites ajoutées et sa classe au moins égale à la plus petite des classes des suites ajoutées. Dans la formule

$$[\mathrm{R}]=[\mathrm{P}]+[\mathrm{Q}]$$

on a en effet

$$r(n)\leq\max\,[p(n),\ q(n)]\,.$$

Quelle que soit la suite [P] on a

$$[\mathrm{P}]+[0]=[\mathrm{P}]\,.$$

L'ordre d'un produit est au plus égal à la somme des ordres des facteurs et sa classe au moins égale à la classe de la suite multipliée. On a en effet

$$r(n)\leq\max\,[q(0)+p_1(n),\ \ q(1)+p_1(n)-1,\ \ q(2)+p_1(n)-2,\ldots q(p_1(n))]$$

où

$$p_1(n)=\max\,[p(n),\ p(n-1)+1,\ p(n-2)+2,\ldots,p(0)+n]\,.$$

Si l'un des facteurs est [0] le produit est égal à [0].

Pour les suites normales de classe 0 la réciproque est vraie, mais dans le cas général le produit de deux suites non nulles peut être nul; par exemple pour les suites

$$\begin{array}{ll}[\mathrm{P}] & x,\ 0,\ 0,\ldots\ 0,\ldots \\[1ex] [\mathrm{Q}] & 1,\ -x,\ \dfrac{x^2}{2;},\ldots\ \dfrac{(-1)^n\,x^n}{n\,!},\ldots\end{array}$$

on a

$$[\mathrm{Q}]\,.\,[\mathrm{P}]=[0]$$

Connaissant le produit de deux suites, on peut calculer une puissance entière positive quelconque. Nous désignerons par $[\mathrm{P}]^m$, ou $[{}_m\mathrm{P}]$ la $m^{\text{ème}}$ puissance de la suite [P]. Nous posons par définition

$$[\mathrm{P}]^0=[{}_0\mathrm{P}]=[1]\,.$$

Nous avons alors pour m, k entiers positifs ou nuls

$$[\mathrm{P}]^m\,.\,[\mathrm{P}]^k=[\mathrm{P}]^{m+k}\quad;\quad\{[\mathrm{P}]^m\}^k=[\mathrm{P}]^{mk}\,.$$

Il faut dire encore quelques mots sur *la division élémentaire* des suites.

Nous disons qu'une suite [P] est *divisible à gauche* par la suite [Q] s'il existe une suite [R] unique et bien déterminée telle que

$$[\mathrm{P}]=[\mathrm{Q}]\,.\,[\mathrm{R}]\,. \tag{6}$$

L'équation (6) n'est pas toujours possible en [R] et si elle est possible la solution n'est pas toujours unique.

Si [R] est la suite [1] nous disons que [P] a une *inverse à gauche.* Désignons par $[\mathrm{P}]_g^{-1}$ cette inverse. Nous avons

$$[\mathrm{P}]\,.\,[\mathrm{P}]_g^{-1}=[1]$$

d'où on déduit que la suite [P] est divisible à gauche par toute suite admettant une inverse à gauche.

D'une façon analogue on définit la *division à droite* et *l'inverse à droite* $[P]_d^{-1}$. Pour que $[P]_d^{-1}$ existe il faut que la suite [P] soit de classe 0.

Si une suite [P] a une inverse à gauche et une inverse à droite et si

$$[P]_g^{-1}=[P]_d^{-1}$$

nous disons qu'elle est *inversible*. Nous désignons alors par $[P]^{-1}$ l'inverse de [P]. Toutes les puissances entières d'une telle suite sont déterminées.

3. Nous allons signaler quelques propriétés des suites normales. *Le produit de deux suites normales est une suite normale de classe égale à la somme des classes des facteurs*

Posant

$$[Q]\cdot[P]=[R]$$

nous avons

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}R_{k+k'+j}^{(j)}=\left\{\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}Q_{k'+j}^{(j)}\right\}\left\{\sum_{j=0}^{k'+i}\binom{k'+i}{j}P_{k+i}^{(j)}\right\}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

k, k' étant les classes de [P] et [Q].

Il en résulte que le produit de deux suites normales est toujours différent de [0].

Toute suite normale de classe 0 est inversible et son inverse est encore une suite normale de classe 0.

Soit $[_{-1}P]$ la suite inverse; on a

$$\left\{\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}{}_{-1}P_j^{(j)}\right\}\left\{\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}P_j^{(j)}\right\}=1$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Les suites normales de classe zéro forment un groupe. Ce groupe n'est pas permutable, mais il contient de sous-groupes permutables.

Nous connaissons déjà une puissance entière quelconque d'une suite normale de classe 0.

Posons

$$U_i^{(j)}=\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}P_{s+i}^{(s)}$$

et introduisons la notation suivante

$$[a_1,\ a_2,\ldots a_k]=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2\ldots a_1^{k-2} & a_1^m\\ 1 & a_2 & a_2^2\ldots a_2^{k-2} & a_2^m\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ 1 & a_k & a_k^2\ldots a_k^{k-2} & a_k^m\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2\ldots a_1^{k-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2\ldots a_2^{k-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ 1 & a_k & a_k^2\ldots a_k^{k-1}\end{vmatrix}$$

Considérons maintenant la suite $[_mP]$ définie par les relations

$$_mP_n=\sum_{n_1,\,n_2,\ldots n_k}U_{n_1}^{(0)}\cdot U_{n_2}^{(n_1)}\cdot U_{n_3}^{(n_1+n_2)}\ldots U_{n_k}^{(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1})}\cdot$$

$$\cdot\,[U_0^{(0)},\ U_0^{(n_1)},\ U_0^{(n_1+n_2)},\ldots\ U_0^{(n_1+n_2+\cdots+n_k)}]$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

la sommation étant étendue aux valeurs positives de n_1, $n_2,\ldots n_k$ vérifiant l'égalité

$$n_1+n_2+\ldots+n_k=n$$

k prenant toutes les valeurs possibles.

On montre que si m est entier

$$(7)\qquad [_mP]=[P]^m.$$

On démontre ensuite que

$$[_mP]\cdot[_{m'}P]=[_{m'}P]\cdot[_mP]=[_{m+m'}P]$$

$$[_{m'}[_mP]]=[_m[_{m'}P]]=[_{mm'}P]$$

nous pouvons donc garder l'égalité (7) comme définissant *une puissance quelconque* de la suite [P], normale et de classe 0.

On a

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}{}_mP_j^{(j)}=\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}P_j^{(j)}\right)^m.$$

Par exemple pour la suite *binome* normale et de classe 0

$$P_0,\ P_1,\ 0,\ 0,\ldots 0,\ldots$$

on a

$$_mP_n=P^n\cdot[U_0^{(0)},\ U_0^{(1)},\ U_0^{(2)},\ldots U_0^{(n)}]$$

Le nombre $[U_0^{(0)},\ U_0^{(1)},\ldots U_0^{(n)}]$ généralise le nombre $\binom{m}{n}$ et se réduit à ce dernier pour $P'_1=0$.

Si $P'_1\neq 0$ la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}[U_0^{(0)},\ U_0^{(1)},\ldots U_0^{(n)}]$$

converge absolument quel que soit m. On démontre en effet sans difficulté que

$$| [U_0^{(0)}, U_0^{(1)}, \ldots U_0^{(n)}] | < \frac{\binom{n}{n'}}{n!\,(P'_1)^n} \sum_{i=0}^{n} | U_0^{(i)} |^m$$

n étant égal à $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ suivant que n est pair ou impair.

4. *Sur quelques suites particulières.* Désignons par $[a]$, $[b]$, ... les suites de nombres, donc les suite (1) telles que $p(n) \leq 0$ $n=0, 1, 2, \ldots$ Une suite de nombres est toujours normale. Son ordre est égal à sa classe changée de signe.

Les suites de nombres de classe 0 forment un sous-groupe permutable du groupe des suites normales de classe 0.

Une suite normale de classe 0 permutable avec une suite de nombres de classe 0 n'est pas nécessairement une suite de nombres. Si la suite de nombres a tous ses éléments différents de zéro toute suite permutable avec elle est une suite de nombres.

Considérons les suites de la forme

(8) $$P_n = a_n \frac{x^n}{n!}, \qquad n=0, 1, 2, \ldots$$

Ces suites sont caractérisées par la suite de nombres $[a]$. Nous les désignerons par $[P; [a]]$. Pour qu'une telle suite soit normale il faut qu'elle soit de la classe 0. Les conditions de normalité sont alors

$$\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a_j \neq 0$$
$$i=0, 1, 2, \ldots$$

Les suites normales de la forme (8) forment un sous-groupe permutable du groupe des suites normales de classe 0.

La suite inverse

$$[P; [a]]^{-1} = [{}_{-1}P; [{}_{-1}a]]$$

est déterminée par les équations

$$\left\{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} {}_{-1}a_i\right\} \left\{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i\right\} = 1$$
$$n=0\ 1, 2, \ldots$$

Le produit

$$[Q; [b]] \cdot [P; [a]] = [R; [c]]$$

est déterminé par les équations

(9) $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i\right).$$

La puissance $[P; [a]]^m = [{}_mP; [{}_ma]]$ est donnée par

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} {}_ma_i = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a\right)^m$$
$$n=0, 1, 2, \ldots$$

Des équations (9) nous tirons facilement

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i \left(\sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} a_{n-i+r}\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i \left(\sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} b_{n-i+}\right).$$

Si les séries

$$\Sigma\, a_n z^n \quad , \quad \Sigma\, b_n z^n$$

convergent à l'intérieur des cercles de rayon respectivement éga à R_a, R_b, la série

$$\Sigma\, c_n z^n$$

converge certainement à l'intérieur du cercle de rayon

$$R_c = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{R_a}\right)\left(1+\frac{1}{R_b}\right)-1}$$

mais elle peut éventuellement converger à l'extérieur de ce cercle.

5. La suite $[A]$ est une suite *harmonique* si

$$A_0 = c^{te}, \quad A'_n = A_{n-1}, \quad n=1, 2, \ldots$$

Une telle suite est caractérisée par une suite de nombres $[\alpha]$ et on a

$$A_n = \frac{\alpha_0}{n!} x^n + \frac{\alpha_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \cdots + \alpha_n.$$

Toute suite harmonique est normale et de classe 0. Envisageons les suites plus générales de la forme

$$P_n = a^n A_n, \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

$[A]$ étant une suite harmonique. Désignons ces suites par $[P; [\alpha], a]$. Les suites de cette forme sont normales et de classe 0 si $a \neq -1$. *Elle forment un groupe.* La suite inverse $[{}_{-1}P; [{}_{-1}\alpha], {}_{-1}a]$ est telle que

$${}_{-1}a = -\frac{a}{1+a}$$

et la suite $[{}_{-1}\alpha]$ est telle, que la suite

$${}_{-1}\alpha_0, \ -{}_{-1}\alpha_1, \ {}_{-1}\alpha_2, \ldots \ (-1)^n {}_{-1}\alpha_n, \ldots$$

est l'inverse de $[\alpha]$.

Le produit

$$[R\,;[\gamma]\,,c]=[Q\,;[\beta]\,,b]\,.\,[P\,;[\alpha]\,,a]$$

s'obtient par les formules

$$c=a+b+ab$$

$$c^n\gamma_n=\sum_{i=0}^{n} b^i(a+1)^i a^{n-i}\alpha_{n-i}\beta_i$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Pour la puissance

$$[{}_mP\,;[{}_m\alpha]\,,{}_ma]=[P\,;[\alpha]\,,a]^m$$

on a en général

$${}_ma=(a+1)^n-1\,.$$

On voit que ce groupe n'est pas permutable.

6. *Transformation d'une suite par rapport à une suite fondamentale.* Une suite sera dite *fondamentale* si elle est normale et de classe 1. Soit donc une suite fondamentale

$$[G] \qquad G_0\,,\ G_1\,,\ldots\ G_n\,,\ldots$$

où $G_0=0$, $G_1=c^{te}\neq 0$. Nous considérons les puissances entières positives $[{}_mG]$ de $[G]$. La suite $[{}_mG]$ est normale et de classe m. La suite $[G]$ sera désignée aussi par $[{}_1G]$. La suite $[{}_0G]$ est la suite unité.

Nous appellons *transformée de la suite* $[P]$ *par rapport à la suite fondamentale* $[G]$ la nouvelle suite

$$[Q] \qquad Q_0\,,\ Q_1\,,\ldots\ Q_n\,,\ldots$$

obtenue par les équations

$$P=\sum_{i=0}^{n} Q_{i\,.\,i}G_n \qquad (10)$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

La suite $[Q]$ est complétement déterminée par ces équations puisque

$${}_nG_n=\prod_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{i}\binom{i}{s}G^{(s)}_{s+1}\right)\neq 0$$

$$n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

expriment justement la normalité de la suite fondamentale. Nous regarderons la suite transformée comme étant *prise par rapport à la suite* $[G]$ et nous la désignons par $[Q\mid G]$.

Pour les suites prises par rapport à une suite fondamentale nous pouvons établir aussi une algèbre. Cette algèbre sera *caractérisée par la multiplication.*

Le produit

$$[Q\mid G]\,.\,[P\mid G]=[R\mid G]$$

est défini par les égalités

$$\sum_{i=0}^{n} R_{i\,.\,i}G_n=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{i}Q_{r\,.\,r}G_i\right)\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}\left(\sum_{s=0}^{n-j}P_{s\,.\,s}G_{n-j}\right)^{(i-j)}\right] \qquad (11)$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

De cette façon *le produit des transformées de deux suites est égal à la transformée de leur produit élémentaire.*

On voit que la multiplication élémentaire correspond aux suites prises par rapport à la suite fondamentale

$$0\,,\ 1,\ 0,\ 0,\ldots\ 0\,,\ldots$$

La suite fondamentale $[G]$ a été prise elle même par rapport à cette suite.

Soient $[G]$, $[H]$ deux suites fondamentales. D'une manière générale la transformée $[P\mid H]$ par rapport à la suite $[G]$ est une suite $[Q\mid G]$ définie par les égalités

$$\sum_{i=0}^{n} P_{i\,.\,i}H_n=\sum_{i=0}^{n} Q_{i\,.\,i}G_n$$

$$n=0\,,\ 1,\ 2\,,\ldots$$

Désignons par $[\overline{G}\mid G]$ la transformée de la suite fondamentale

$$0\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 0\,,\ldots 0\,,\ldots \qquad (12)$$

par rapport à $[G]$. Cette suite est donnée par les égalités

$$\sum_{i=0}^{n}\overline{G}_{i\,.\,i}G_n=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

La suite $[\overline{G}\mid G]$ est *la réciproque de* $[G]$. Nous pouvons calculer la $m^{ème}$ puissance entière positive $[{}_m\overline{G}\mid G]$ de $[\overline{G}\mid G]$. On trouve que cette puissance est donnée par les équations

$${}_m\overline{G}_0={}_m\overline{G}_1=\cdots={}_m\overline{G}_{m-1}=0$$

$$\sum_{i=m}^{n}{}_m\overline{G}_{i\,.\,i}G_n=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n>m\end{cases}$$

On a également

$${}_mG_0={}_mG_1=\cdots={}_mG_{m-1}=0$$

$$\sum_{i=m}^{n}{}_mG_{i\,.\,i}\overline{G}_n=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n>m\end{cases}$$

Citons encore les formules

$$\sum_{i=0}^{n} {}_{m-i}\overline{G}_{m} \cdot {}_{m-n+i}G_m = 0$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Si on considère la suite réciproque par rapport à la suite (12) elle est aussi une suite fondamentale. A l'aide de la suite réciproque les formules (10), (11) peuvent s'écrire

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n} P_{i} \cdot {}_{i}\overline{G}_n$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$R_n = \sum_{i=0}^{n} {}_{i}\overline{G}_n \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\alpha} Q_{r} \cdot {}_{r}G_{\alpha} \right) \left[\sum_{j=0}^{i} \binom{\alpha}{j} \left(\sum_{s=0}^{i-j} P_{s} \cdot {}_{s}G_{i-j} \right)^{(\alpha-j)} \right] \right\}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Supposons en particulier qu'il s'agit de suites d'ordre négatif ou nul; nous pouvons écrire

$$R = \sum_{i=0}^{n} Q_i \left(\sum_{j=0}^{n-i} {}_{j+i}G_n \cdot B_{j+1,i} \right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

où

$$B_{i,j} = \sum_{r=0}^{i-j} {}_{j}G_{r+j} \cdot A_{i,r+j}$$

$$A_{i,j} = \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \left(\sum_{s=0}^{i-r} P_{s} \cdot {}_{s}G_{i-r} \right)^{(j-r)}$$

7. La classe et l'ordre d'une suite sont invariants par rapport à une transformation. L'indice caractéristique est aussi indépendant d'une trasformation. La permutabilité est une propriété invariante par rapport à une transformation.

Si la suite [P | G] est prise par rapport à la suite fondamentale [G] nous disons qu'elle est *normale* si elle est de classe k, d'ordre $-k$ et si

$$\sum_{j=0}^{k} {}_{j+m}\overline{G}_{k+m} \quad B_{j+m,m} \neq 0$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

Les quantités du premier membre sont des nombres. En effet on a dans ce cas

$$A_{i,j} = 0 \qquad \text{si} \qquad i < j + k$$

donc

$$\sum_{j=0}^{k} {}_{j+m}\overline{G}_{k+m} \cdot B_{j+m,m} = {}_{k+m}\overline{G}_{k+m} \cdot {}_{m}G_m \cdot A_{k+m,m} =$$

$$= {}_{k+m}\overline{G}_{k+m} \cdot {}_{m}G_m \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \left(\sum_{s=0}^{m-r} \binom{m-r}{s} P^{(s)}_{k+s} \; {}_{k+s}G^{(m-r-s)}_{k+m-r} \right)$$

On voit donc *qu'une suite normale se transforme en une suite normale.*

On en déduit encore que *la transformée par rapport à [G] d'une suite normale de classe 0 admet une inverse qui est égale à la transformée de l'inverse.*

La multiplication des suites de nombres prises par rapport à une suite fondamentale [G] se fait d'après la règle ordinaire

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_n$$

donc:

Les suites de nombres de classe 0, *[a | G] forment un sous-groupe permutable du groupe des suites normales de classe zéro.*

Soit [H] une suite normale de classe 1. Les suites [P] de la forme

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot {}_{i}H_n$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

a_i étant des constantes, forment un groupe permutable.

8. On pourrait étudier encore diverses autres questions relativement aux suites de polynomes. L'étude des suites jouissant de propriétés particulières conduit à des identités intéressantes, comme l'a fait M. Lagrange pour les suites de nombres[1]. Nous faisons remarquer encore que la conception de M. Lagrange est la suivante: On associe à une suite de nombres [a] la série de puissances

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

[1] loc. cit.

Le lecteur s'en apercevra facilement que *nous associons à la suite* [*P*], *l'opération fonctionnelle*:

$$P_0 + P_1 D + P_2 D^2 + \cdots + P_n D^n + \cdots \qquad D = \frac{d}{dx}$$

Ce nouveau point de vue nous a permis de généraliser la théorie de M. LAGRANGE. Nous l'avons déjà exposé dans un mémoire antérieur où nous en avons donné quelques applications. En particulier nous avons donné des propriétés fonctionnelles intéréssantes pour les suites *binomiales*, que M. LAGRANGE a également étudié sous le nom de *suites d'interpolation*(1).

---

(1) Voir T. POPOVICIU „Asupra unor polinoame remarcabile". La note à la fin du mémoire. (Autographié 1927).