ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 6 JUIN 1932.

PRÉSIDENCE DE M. ROBERT BOURGEOIS.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à M. **Francisco Miranda Da Costa Lobo**, professeur de l'Université de Coïmbre, qui assiste à la séance.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Essai de théorie coordinative de la constitution des composés organiques*. Note de M. **G. Urbain**.

Pour former la liaison C—H, l'atome d'hydrogène doit céder à l'atome de carbone son unique électron. D'où il résulte que, dans le méthane CH^4, l'atome de carbone porte sur son orbite L 8 électrons. Il a alors la structure d'un atome de néon.

Par contre, pour former la liaison C—Cl, l'atome de carbone doit céder à l'atome de chlore un électron; de sorte que, dans le tétrachlorure de carbone CCl^4, l'atome de carbone a perdu, au bénéfice du chlore, la totalité de ses électrons périphériques. Il a alors la structure d'un atome d'hélium.

Nous dirons que, dans CH^4, le carbone est électro-tétravalent négatif, et qu'il est électro-tétravalent positif dans CCl^4; ou encore qu'il a l'électrovalence -4 dans le méthane, et l'électrovalence $+4$ dans le tétrachlorure de carbone.

Cette manière de voir, conforme aux principes fondamentaux de l'électronique, revient à admettre que, dans les composés organiques, les différents atomes, y compris ceux de carbone, sont porteurs de charges électriques. Ce sont des *ions dissimulés*, comme on dit dans le langage de la théorie des complexes minéraux —ou encore *liés*.

deuxième groupe, de poids dominant

$$\beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_2 + \ldots + \beta_p\mu_p, \quad \text{où} \quad p < q \quad \text{et} \quad \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p = s,$$

correspond à un autre schéma (β). Pour que le produit de ces deux représentations figure dans la réduction de γ_s, il faut et il suffit que l'on passe du schéma (α_1, α_2) au schéma (β) par l'échange des lignes et des colonnes. A chaque schéma (α_1, α_2) avec au plus q colonnes correspond alors un groupe irréductible et un seul contenu dans γ_s, la variable dominante étant

$$[\omega'_1\omega'_2\ldots\omega'_{\alpha_1}\omega^2_1\omega^2_2\ldots\omega^2_{\alpha_2}].$$

D'où :

THÉORÈME. — *La valeur moyenne du carré du module du caractère de γ_s est égal au nombre de schémas (α_1, α_2) avec $q \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq 0$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = s$.*

A chaque groupe irréductible obtenu correspond une forme extérieure invariante d'ordre $2s$ que nous désignons par $\Omega(\alpha_1, \alpha_2)$ et qui fournit une intégrale de différentielle exacte. Cette intégrale est nulle lorsqu'on l'étend à une variété fondamentale de Schubert $[a_1, a_2]$ à s dimensions complexes, sauf si la variété a pour symbole $[\alpha_2, \alpha_1 + 1]$. Les formes Ω n'étant définies qu'à un facteur constant près, on peut supposer que $\int \Omega(\alpha_1, \alpha_2)$ étendue à $[\alpha_2, \alpha_1 + 1]$ soit égale à 1.

D'après les théorèmes démontrés par M. de Rham [1], on peut conclure : Dans l'espace complexe des droites, les nombres de Betti relatifs aux dimensions impaires sont nuls. Une base de l'homologie avec division pour les cycles de dimension $2s$ est fournie par les variétés fondamentales de Schubert $[a_1, a_2]$ avec $a_1 + a_2 = s + 1$.

Les résultats précédents se généralisent facilement quand on considère la variété des hyperplans à k dimensions de l'espace projectif complexe à n dimensions.

GÉOMÉTRIE. — *Certaines courbes qui généralisent les coniques.* Note [2] de M. **D. V. Jonesco**, présentée par M. Élie Cartan.

Je me propose de montrer quelques problèmes sur le mouvement d'un point dont les trajectoires sont des courbes généralisant les coniques.

I. Je cherche d'abord le mouvement d'un point M dont la projection de

---

[1] *Journ. de Math. pures et appl.*, 10, 1931, p. 115-200.

[2] Séance du 8 février 1932.

la vitesse sur la perpendiculaire au rayon vecteur est égale à une constante k, et dont la projection sur une droite fixe Δ est animée d'un mouvement uniforme de vitesse a.

En prenant la droite Δ comme axe Oy, on trouve que l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires est

$$(1) \qquad r = A \frac{\operatorname{tang}^{\frac{a}{k}} \frac{\theta}{2}}{\sin\theta},$$

où A est une constante quelconque.

L'accélération du point M est parallèle à l'axe Ox, et a pour expression

$$\vec{J} = -\frac{k^2}{A} \operatorname{cotg}^{\frac{a}{k}-1} \frac{\theta}{2} + \frac{k(k-a)}{A} \frac{\operatorname{cotg}^{\frac{a}{k}} \frac{\theta}{2}}{\sin\theta}.$$

Pour $a = k$, on retrouve un résultat classique, la trajectoire est une parabole, et l'accélération est constante.

Les courbes représentées par l'équation (1) ont la propriété suivante : en désignant par Q le point où la tangente en M rencontre l'axe Ox, on a

$$(2) \qquad OQ = \frac{k}{a} r,$$

ce qui montre qu'on peut regarder les courbes (1) comme généralisant la parabole aussi à un autre point de vue.

II. Je cherche maintenant le mouvement d'un point M dont la projection de la vitesse sur la perpendiculaire au rayon vecteur est égale à k, et dont le mouvement se fait suivant la loi des aires par rapport au point P.

En prenant OP comme axe Ox, l'équation de la trajectoire est

$$(3) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\lambda - c\cos\theta}{\lambda^2 - c^2} + A \sin\theta \operatorname{tang}^{\frac{\lambda}{c}} \frac{\theta}{2},$$

où A est une constante quelconque, c désigne la distance OP et λ le rapport de la constante des aires C à k. Je laisse de côté le cas $\lambda = \pm c$.

L'accélération du point M est donnée par la formule

$$\vec{J} = -\frac{k^2}{\lambda^2 - c^2} \overrightarrow{PM} - A k^2 \frac{\lambda + c\cos\theta}{c^2 \sin\theta} \operatorname{tang}^{\frac{\lambda}{c}} \frac{\theta}{2} \overrightarrow{PM}.$$

Dans le cas $A = 0$, on trouve la réciproque d'un résultat bien connu, la trajectoire est une conique ayant P pour centre et O pour foyer et dont l'accélération est proportionnelle à la distance du point M au centre.

Les courbes représentées par l'équation (3) jouissent, lorsque $A \neq 0$, de la propriété suivante :

$$\text{(4)} \qquad OQ = \frac{cr}{r-\lambda},$$

où Q est le point où la tangente en M à la courbe rencontre OP.

On démontre aussi que réciproquement les courbes qui ont la propriété (4) sont données par l'équation (3). Je traiterai à part les courbes pour lesquelles OQ est une fonction homographique quelconque de r.

Dans le cas $A = 0$, c'est-à-dire dans le cas des coniques, la démonstration qui m'a conduit à la formule (4) montre la propriété suivante :

Si O est le foyer d'une conique quelconque, Q l'intersection de la tangente en M à la conique avec l'axe de la conique passant par O, et si R est l'intersection de la perpendiculaire en Q à MQ avec OM, on a

$$OQ = e.OR,$$

e étant l'excentricité de la conique.

III. Je cherche enfin le mouvement d'un point M dont les projections de la vitesse sur les perpendiculaires aux rayons vecteurs OM et O'M sont des constantes a et b.

En prenant OO' comme axe Ox, et en désignant les angles xOM, xO'M par θ et θ', l'équation de la trajectoire est

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tang}^a \frac{\theta'}{2} = A \operatorname{tang}^b \frac{\theta}{2},$$

où A est une constante quelconque.

L'accélération du point M est

$$\vec{J} = -a\frac{b - a\cos u}{rr'\sin^2 u}\overrightarrow{O'M} - b\frac{a - b\cos u}{rr'\sin^2 u}\overrightarrow{OM},$$

où u est l'angle OMO' égal à $\theta' - \theta$.

Dans le cas $a = b$, la trajectoire est une ellipse qui a O et O' pour foyers.

L'équation (5) montre que lorsque M décrit l'ellipse, le rapport du rayon du cercle inscrit au triangle OMO' au rayon du cercle exinscrit au même triangle, relativement au sommet M, est constant.

Dans le cas $a = -b$, la trajectoire est une hyperbole ayant O et O' pour foyers. L'équation (5) montre que lorsque le point M décrit l'hyperbole, le rapport des rayons des cercles exinscrits au triangle OMO', relativement aux sommets O et O', est constant.

Les cas précédents $a = \pm b$ sont les réciproques des propriétés bien connues du mouvement d'un point attiré ou repoussé par deux centres proportionnellement à la distance.

ALGÈBRE. — *Formes d'Hermite, groupe de Picard et théorie des idéaux de quaternions.* Note de M. **Rud. Fueter**.

La liaison intime qui existe entre les formes quadratiques binaires et la théorie des idéaux d'un corps quadratique est bien connue. Une semblable relation peut être établie entre la forme d'Hermite :

$$A\xi\bar{\xi} + B\xi\bar{\eta} + \bar{B}\bar{\xi}\eta + C\eta\bar{\eta},$$

et la théorie des idéaux dans certains *anneaux de quaternions*. Cette dernière théorie fournit tous les résultats classiques d'Hermite [1], et montre sous un point de vue légèrement différent l'importance primordiale du groupe traité d'une manière magistrale par M. Picard [2].

1° Soient $1, i_1, i_2, i_3$ les unités quaternions. D'après Hurwitz [3] les quaternions

$$x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 \rho, \qquad \rho = \frac{1}{2}(1 + i_1 + i_2 + i_3)$$

forment un domaine d'intégrité maximum, si les x parcourent tous les nombres rationnels entiers. Le nombre des classes d'idéaux (gauches) dans ce domaine est égal à 1. On montre facilement que ce domaine de Hurwitz peut être représenté de la manière suivante : $\xi + \eta\rho$ (ainsi que $\xi + \rho\eta$), où ξ, η parcourent tous les nombres entiers complexes de Gauss avec les unités $1, i_1$. J'appelle $1, \rho$ une base du domaine de Hurwitz relative au corps $k(i_1)$. Plus généralement j'appelle ω_1, ω_2 la base d'un idéal $\mathfrak{a}$ gauche [4] relative à $k(i_1)$, si tous les quaternions de $\mathfrak{a}$ sont représentés par $\xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2$, ξ_1, ξ_2 parcourant tous les entiers de $k(i_1)$, et si $\omega_2\omega_1^{-1}$ possède des composantes troisième et quatrième positives (l'une peut être nulle). On démontre que chaque $\mathfrak{a}$ possède une base relative et qu'on reçoit toutes

(1) Ch. Hermite, *Œuvres*, Paris, 1, 1905, p. 234 et suiv.

(2) E. Picard, *Selecta*, Paris, 1928, p. 103 et suiv.

(3) A. Hurwitz, *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*, 1919.

(4) La théorie des idéaux droits peut être développée de la même manière.