QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES, [1]

par M. D. V. Jonesco,
Professeur à la Faculté des Sciences de Cluj (Roumanie).

II. **4**. Les coniques (C), (C′), (C″) considérées dans ce qui précède sont bitangentes aux droites isotropes OI, OJ aux points de rencontre avec la directrice *d*. On va démontrer, par le calcul, que la propriété établie dans le § **3** est encore vraie, quand on remplace les droites OI, OJ par des droites quelconques.

Si A, B sont les points où la droite *d* d'équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$$

coupe les axes coordonnés, il s'agit de démontrer qu'*étant données deux des coniques*

$$\Gamma \equiv \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2+2\lambda xy=0, \tag{8}$$

$$\Gamma' \equiv \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2+2\lambda' xy=0 \tag{9}$$

qui sont tangentes aux droites Ox. Oy *aux points* A, B, *l'enveloppe des polaires des points de la conique* (Γ′) *par rapport à la conique* (Γ) *est une troisième conique*

$$\Gamma'' \equiv \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2+2\lambda'' xy=0 \tag{10}$$

tangente aux droites Ox, Oy *aux points* A, B *et telle que*

$$\lambda''=\frac{\lambda^2}{\lambda'}. \tag{11}$$

L'équation, en coordonnées courantes (X, Y), de la polaire m' par rapport à (Γ) du point $M'(x, y)$ de la conique (Γ′) est

$$\left(\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}-1\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+\lambda(xY+yX)=0, \tag{12}$$

et on a l'équation de condition

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2+2\lambda' xy=0 \tag{13}$$

[1] Suite, voir M, 1932-398.

Pour en déduire l'équation de l'enveloppe de la droite m', il faut éliminer x, y, et $y' = \dfrac{dy}{dx}$ entre ces deux équations (12) et (13) et leurs dérivées par rapport à x,

$$\left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{y'}{b}\right) + \lambda(Y + y'X) = 0 \tag{14}$$

et

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{y'}{b}\right) + \lambda'(y + y'x) = 0. \tag{15}$$

L'élimination de y' entre celles-ci donne

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1\right)\frac{1}{a} + \lambda Y & \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1\right)\frac{1}{b} + \lambda X \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)\frac{1}{a} + \lambda' y & \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)\frac{1}{b} + \lambda' x \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Mais si on additionne les éléments de la première colonne du déterminant, multipliés par x, à ceux de la seconde, multipliés par y, il résulte des équations (12) et (13) que les sommes obtenues valent respectivement

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1.$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} \lambda X & \lambda Y & \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1 \\ \lambda' x & \lambda' y & \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \end{vmatrix} = 0\,; \tag{14}$$

d'où,

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1\right)^2 & 2\frac{\lambda^2}{\lambda'} XY \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 & 2\lambda' xy \end{vmatrix} = 0$$

et, la somme des éléments de la seconde ligne de ce déterminant étant nulle, en vertu de la condition (13) par laquelle on a exprimé que le point M' est sur la conique (Γ'), l'enveloppe de la droite m' est la conique d'équation

$$\left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - 1\right)^2 + 2\frac{\lambda^2}{\lambda'} XY = 0. \tag{15}$$

Le théorème est donc démontré et la relation (11) étant symétrique par rapport aux paramètres λ', λ'', la conique (Γ'') est, à son tour, l'enveloppe des polaires, par rapport à la conique (Γ), des points de la conique (Γ'').

5. Soit M″ le point où la droite m' touche la conique (Γ''). Les coordonnées X, Y de ce point vérifiant les équations (14),

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$

et le point M″ est donc sur la droite OM.

Démontrons que si P est le point où la droite OM′M″ coupe la droite *d, le rapport anharmonique* (OPM′M″) *conserve la même valeur lorsque les points* M′, M″ *décrivent les coniques* (Γ'), (Γ'').

Calculons, d'abord, les coordonnées X, Y du point M″ en fonction de celles x, y du point M′. A cet effet, posons

$$U = \frac{X}{a} + \frac{Y}{b}, \qquad u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

Les équations (14) donnent alors

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \frac{U - 1}{u - 1} = \frac{U}{u}.$$

d'où il résulte que

$$U = \frac{\lambda' u}{(\lambda' - \lambda)\, u + \lambda},$$

et ainsi

$$X = \frac{\lambda' x}{(\lambda' - \lambda) u + \lambda}, \qquad Y = \frac{\lambda' y}{(\lambda' - \lambda)\, u + \lambda}. \tag{16}$$

D'autre part, l'abscisse du point P étant

$$\xi = \frac{x}{u},$$

la valeur du rapport anharmonique considéré est

$$(\mathrm{OPM'M''}) = (0, \xi, x, X) = \frac{x}{X} \cdot \frac{X - \xi}{x - \xi}.$$

Or,

$$X - \xi = \frac{\lambda(u - 1)x}{u[(\lambda' - \lambda)u + \lambda]}, \qquad x - \xi = \frac{u}{(u - 1)x};$$

donc,

$$(\mathrm{OPM'M''}) = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

6. Considérons maintenant une conique quelconque ; soient M un point arbitraire de cette conique, O un point extérieur, P le point où la droite OM coupe la polaire du point O pour la conique, et M′ le point de la droite OM pour lequel le rapport anharmonique (OPMM′) a une valeur constante donnée.

Il résulte de la propriété démontrée au § **5** que *le lieu du point* M′, *lorsque le point* M *décrit la conique donnée, est une autre conique bitangente à la première aux points de rencontre avec la polaire du point* O.

Note. Ainsi qu'on l'a déjà dit dans la note précédente (M, 1932-400), les propriétés des coniques (Γ), (Γ′), (Γ″) sont des conséquences immédiates de la théorie des figures polaires réciproques. Quant à la propriété énoncée à la fin du § **6**, on peut l'établir directement comme application de la théorie des figures homologiques, le lieu du point M′ étant le transformé du lieu du point M par l'homologie dont le centre, l'axe et la constante sont le point L, la polaire du point O pour la conique considérée et la valeur adoptée pour le rapport anharmonique (OPMM′).

(A continuer.) (AD. M.)

SUR LES TRIANGLES ORTHOGONALEMENT INSCRITS A TROIS DROITES DE L'ESPACE,

par M. R. DEAUX, Professeur à l'École des Mines de Mons.

Un triangle T orthogonalement inscrit à trois droites d_1, d_2, d_3 a ses sommets A_1, A_2, A_3 sur celles-ci et ses côtés A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 orthogonaux à ces droites. La présente note établit que, dans le cas général, l'une quelconque de ces droites doit être un rayon d'un certain complexe linéaire défini par les deux autres ; elle recherche l'enveloppe du plan et le lieu de l'orthocentre de tout triangle T.

1. Soient, pour $i = 1, 2, 3$, $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ les coordonnées pluckériennes de d_i, ; $\bar{e}_i$, $\overline{E}_i$ les coordonnées vectorielles d'un point fixe et d'un point variable de d_i ; t_i un paramètre. L'équation de d_i est

$$\overline{E}_i = \bar{e}_i + t_i\bar{u}_i, \tag{1}$$

et on a

$$\bar{v}_i = \mathcal{M}\,\bar{e}_i\bar{u}_i, \tag{2}$$

$$\bar{u}_i\bar{v}_i = 0. \tag{3}$$

Un triangle T exige

$$\bar{u}_1(\overline{E}_2 - \overline{E}_3) = \bar{u}_2(\overline{E}_3 - \overline{E}_1) = \bar{u}_3(\overline{E}_1 - \overline{E}_2) = 0$$