QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES [1],

par M. D. V. JONESCO, Professeur à la Faculté des Sciences de Cluj (Roumanie).

III. **7.** Les propriétés démontrées, dans les §§ **4**, **5**, **6** pour les coniques, se généralisent, dans l'espace, pour les quadriques. Soient

$$(16)\qquad 2\varphi(x, y, z) + \lambda P^2 = 0, \qquad 2\varphi(x, y, z) + \lambda' P^2 = 0 \qquad (17)$$

deux quadriques circonscrites au cône du second ordre

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

dont le sommet est l'origine, le long de l'intersection par le plan

$$P \equiv ux + vy + wz + p = 0.$$

On va démontrer que l'enveloppe des plans polaires des points de (S′) par rapport à (S) est la quadrique (S″) d'équation

$$2\varphi(x, y, z) + \frac{\lambda^2}{\lambda'} P^2 = 0.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point arbitraire M′ de la quadrique (S′) .L'équation du plan polaire μ' du point M′ pour la quadrique (S) est, en coordonnées courantes X, Y, Z,

$$(18)\qquad x\varphi'_X + y\varphi'_Y + z\varphi'_Z + \lambda P_0 P = 0$$

où on a posé

$$P = uX + vY + wZ + p \qquad \text{et} \qquad P_0 = ux + vy + wz + p.$$

Considérant z comme une fonction de x et de y définie par l'équation (17), on aura l'équation de l'enveloppe du plan μ', en éliminant x, y, z entre les équations (17), (18) et leurs dérivées partielles par rapport à x et à y, ou

$$(19)\quad \varphi'_X+\lambda uP+(\varphi'_Z+\lambda wP)\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \varphi'_Y+\lambda vP+(\varphi'_Z+\lambda wP)\frac{\partial z}{\partial y}=0, \quad (20)$$

$$(21)\,\varphi'_x+\lambda' uP_0+(\varphi'_z+\lambda' wP_0)\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \varphi'_y+\lambda' vP_0+(\varphi'_z+\lambda wP_0)\frac{\partial z}{\partial y}=0\ (22)$$

---

[1] **Suite, M, 1932-398 et 1933-51.**

L'élimination de $\frac{\partial z}{\partial x}$ entre (19) et (21), et de $\frac{\partial z}{\partial y}$ entre (20) et (22) donne

$$\begin{vmatrix} \varphi'_X + \lambda u P & \varphi'_Y + \lambda v P & \varphi'_Z + \lambda w P \\ \varphi'_x + \lambda' u P_0 & \varphi'_y + \lambda' v P_0 & \varphi'_z + \lambda' w P_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, en vertu des équations (18) et (17), les sommes

$$x(\varphi'_X + \lambda u P) + y(\varphi'_Y + \lambda v P) + z(\varphi'_Z + \lambda w P),$$

$$x(\varphi'_x + \lambda' u P_0) + y(\varphi'_y + \lambda' v P_0) + z(\varphi'_z + \lambda' w P_0)$$

valent respectivement

$$-\lambda p P \qquad \text{et} \qquad -\lambda' p P_0.$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} \varphi'_X + \lambda u P & \varphi'_Y + \lambda v P & \varphi'_Z + \lambda w P & \lambda P \\ \varphi'_x + \lambda' u P_0 & \varphi'_y + \lambda' v P_0 & \varphi'_z + \lambda' w P_0 & \lambda' P_0 \end{vmatrix} = 0$$

et, par suite,

$$\begin{vmatrix} \varphi'_X & \varphi_Y & \varphi'_Z & \lambda P \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \lambda' P_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

Or, il résulte des propriétés des formes quadratiques et de (18) que

$$\begin{vmatrix} X\varphi'_X + Y\varphi'_Y + Z\varphi'_Z & 2\varphi(X, Y, Z) & 2\varphi(X, Y, Z) \\ X\varphi'_x + Y\varphi'_y + Z\varphi'_z & x\varphi'_X + y\varphi' + z\varphi'_Z & -\lambda P_0 P \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, à cause de (23),

$$\begin{vmatrix} \lambda P & 2\varphi(X, Y, Z) \\ \lambda' P_0 & -\lambda P P_0 \end{vmatrix} = 0$$

et l'enveloppe du plan μ' est la quadrique

$$2\varphi(X, Y, Z) + \frac{\lambda^2}{\lambda'} P^2 = 0.$$

ou (S'').

La relation

$$\lambda' \lambda'' = \lambda^2$$

liant les paramètres λ, λ', λ'' des quadriques (S), (S'), (S'') n'étant pas altérée quand on y permute λ' avec λ'', la quadrique (S') est l'enveloppe des plans polaires des points de (S'') par rapport à (S).

8. Soient M$''$ le point de contact du plan μ' avec la quadrique (S$''$) et I le point où la droite OM$'$ coupe le plan $P = 0$. On va démontrer que *les points* O, M$'$, M$''$ *sont en ligne droite et le rapport anharmonique* (OIM$'$M$''$) *conserve la même valeur quand le point* M$'$ *décrit la quadrique* (S$'$), *dans le cas où le cône* φ *est un cône non dégénéré.*

Soit

$$\varphi(x, y, z) \equiv ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

l'équation du cône φ.

En désignant par k la valeur commune des rapports (23) des dérivées partielles de φ, on a

$$\begin{aligned} a(X - kx) + b''(Y - ky) + b'(Z - kz) &= 0,\\ b''(X - kx) + a'(Y - ky) + b(Z - kz) &= 0,\\ b'(X - kx) + b\,(Y - ky) + a''(Z - kz) &= 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de la forme quadratique $\varphi(x, y, z)$ n'étant pas nul, il résulte des trois équations précédentes que

$$X - kx = 0, \qquad Y - kz = 0, \qquad Z - kz = 0.$$

On a donc

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = k,$$

ce qui prouve déjà que les points O, M$'$, M$''$ sont en ligne droite.

D'autre part, si on pose

$$uX + vY + wZ = L \qquad \text{et} \qquad ux + vy + wz = l$$

les équations (23) peuvent s'écrire

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{\lambda(L + p)}{\lambda'(l + p)} = \frac{L}{l},$$

d'où on tire

$$L = \frac{\lambda p l}{(\lambda' - \lambda)l + p\lambda'}, \qquad X = \frac{p\lambda x}{(\lambda' - \lambda)l + p\lambda'}.$$

Or, la valeur R du rapport anharmonique (OIMM$''$) est, si ξ est l'abscisse de point I,

$$R = (\mathrm{OIM'M''}) = (0, \xi, x, X) = \frac{X}{x} \cdot \frac{X - \xi}{x - \xi},$$

où on doit faire

$$\xi = -\frac{px}{l}, \qquad X - \xi = \frac{\lambda'(l + p)px}{l[(\lambda' - \lambda)l + p\lambda']}, \qquad x - \xi = \frac{x(l + p)}{l};$$

on a donc

$$R = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

ce qui prouve que le rapport anharmonique (OIM'M″) a une valeur constante.

9. Considérons maintenant une quadrique arbitraire (S) et menons, par un point arbitraire O, une sécante quelconque qui coupe la quadrique en M et le plan polaire du point O pour cette quadrique en un point I ; enfin, sur la droite OM, marquons le point M′ de manière que le rapport anharmonique (OIMM′) ait une valeur constante. Il résulte du théorème démontré au § **8** que le lieu du point M′ est une seconde quadrique (S′) circonscrite à la quadrique (S) suivant l'intersection avec le plan polaire du point O.

NOTE De même que dans le cas des coniques, les propriétés des quadriques (S), (S′), (S″) sont des conséquences des propriétés des figures polaires réciproques par rapport à la quadrique (S) et de la théorie des figures homologiques. (AD. M.)

SUR LES SURFACES GAUCHES,

par M. É. ARGHIRIADI, Professeur à Silistra (Roumanie).

Un point M est rapporté à un trièdre trirectangle mobile $Oxyz$ et à un trièdre trirectangle fixe $O_1x_1y_1z_1$. Soient a, b, c les coordonnées du point O dans le trièdre fixe et $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les cosinus des angles que les axes x_1, y_1, z_1 font avec les axes x, y, z. Les coordonnées du point M dans les deux trièdres sont liées par les équations

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= a + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y_1 &= b + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z_1 &= c + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z\,; \end{aligned}$$

les coordonnées x, y, z sont des fonctions de certaines variables et (a, b, c), $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ sont des fonctions d'une variable v qui peut être le temps.

Supposant qu'à un instant donné, les axes mobiles coïncident avec les axes fixes, les composantes δx, δy, δz du déplacement du point M dans les axes fixes, s'obtiennent en fonction des composantes