

REMARQUES SUR LES POLYNOMES BINOMIAUX

par

T. Popoviciu

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure.

Reçue le 28 Avril 1931.

Nous disons que la suite de polynomes en x

$$(1) \quad P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$$

le degré de chacun étant égal à l'indice correspondant, est une suite binomiale si elle vérifie les équations

$$(2) \quad P_n(x+y) = \sum_{i=0}^n P_i(x) P_{n-i}(y)$$

pour $n=0, 1, 2, \dots$ et identiquement en x et y . On a alors

$$P_0 = 1, \quad P_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

On obtient les suites binomiales par le développement formel suivant

$$(3) \quad (1+a_1 z + a_2 z^2 + \dots)^x = e^{x(c_1 z + c_2 z^2 + \dots)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

Il est facile de trouver les coefficients c_n en fonctions des a_n et réciproquement.

1. Si

$$c_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

on a également

$$a_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et si

$$c_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, a_1 > 0$$

on a aussi

$$a_n > 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

Nous trouvons facilement que

 a étant un nombre positif pour qu'on ait

$$(4) \quad P_n(x) \geq 0$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

dans l'intervalle $(0, a)$ il faut et il suffit que

$$(5) \quad c_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Il résulte d'ailleurs de (2) que les inégalités (4) sont vérifiées dans tout l'intervalle $(0, \infty)$.Soit $f(x)$ une fonction uniforme et continue dans l'intervalle fermé $(0, 1)$.Les inégalités (5) étant vérifiées et en supposant que $a_1 > 0$ pour que le polynome

$$H_n = \frac{\sum_{\nu=0}^n f\left(\frac{\nu}{n}\right) P_{\nu}(x) P_{n-\nu}(1-x)}{a_n}$$

converge uniformément vers $f(x)$ dans tout l'intervalle $(0, 1)$ il faut et il suffit que :

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\nu=0}^n \nu^k P_{\nu}(x) P_{n-\nu}(1-x)}{n^k a_n} = x_k$$

quel que soit l'entier positif k .

2. Considérons en particulier les polynomes (1) provenant du développement

$$\frac{xz}{e^{1-z}} = \sum L_n(x) \cdot z^n.$$

Si $L_n^*(x)$ est le polynome de LAGUERRE de degré n on a

$$L_n(x) = L_n^*(-x) - L_{n-1}^*(-x).$$

On obtient facilement

$$L_n(x) = \frac{e^{-x} x}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} x^{n-1} e^x = \sum_{\nu=1}^n \binom{n-1}{\nu-1} \frac{x^{\nu}}{\nu!}$$

Reprenons maintenant le cas général et supposons que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

converge à l'intérieur d'un cercle de rayon r' et de centre origine et prenons $r < r'$. D'après un théorème de CAUCHY il existe un nombre

M tel que

$$|c_n| < \frac{M}{r^n} \quad n = 1, 2, \dots$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M z^n}{r^n} = \frac{M \frac{z}{r}}{1 - \frac{z}{r}} \quad (|z| < r).$$

On en déduit que pour $x \geq 0$

$$|P_n(x)| < \frac{1}{r^n} L_n(Mx).$$

On démontre sans difficulté que si $x > 0$

$$\frac{L_2(x)}{L_1(x)} > \frac{L_3(x)}{L_2(x)} > \dots > \frac{L_n(x)}{L_{n-1}(x)} > \dots$$

le rapport $\frac{L_n}{L_{n-1}}$ a donc une limite finie. La relation de récurrence

$$x L_n = (n+1) L_{n+1} - 2n L_n + (n-1) L_{n-1}$$

nous montre alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{L_{n-1}} = 1 \quad x > 0.$$

On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|P_n(x)|} \leq \frac{1}{r}.$$

Considérons maintenant une suite de nombres

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\lambda_n|} = \lambda.$$

Il en résulte que la série

$$\lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \dots + \lambda_n P_n(x) + \dots$$

converge absolument quels que soient $\lambda < r'$ et $x \geq 0$.