COMPTES RENDUS

HEBDOMADAIRES

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PUBLIÉS,

CONFORMÉMENT A UNE DÉCISION DE L'ACADÉMIE

EN DATE DU 13 JUILLET 1835,

PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME CENT QUATRE-VINGT-DIX-SEPTIÈME.

JUILLET — DÉCEMBRE 1933.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1933

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Généralisation d'une équation de M. E. Goursat.* Note (¹) de M. D. V. Jonesco, transmise par M. Élie Cartan.

M. E. Goursat a démontré (²) que toute équation différentielle de la forme

$$(1)\quad x^n y^{(n+m)} + x^{n-1} p_1(x) y^{(n+m-1)} + \ldots + x p_{n-1}(x) y^{(m+1)} + p_n(x) y^{(m)} + \ldots + p_{n+m}(x) y = 0,$$

où les fonctions $p_i(x)$ sont holomorphes pour $|x| \leqq R$, admet une intégrale holomorphe dans le domaine de l'origine, la valeur de cette intégrale et de ses $m-1$ premières dérivées pouvant être prises arbitrairement pour $x=0$, pourvu que l'équation

$$(r-m)\ldots(r-m-n+1) + p_1(0)(r-m)\ldots(r-m-n+2) + \ldots + p_n(0) = 0$$

n'admette pour racine aucun nombre entier supérieur à $m-1$.

1. On peut transformer l'équation (1) en une équation intégro-différentielle en prenant comme fonction inconnue $y^{(m)} = z(x)$, et tenant compte des conditions initiales. On trouve l'équation intégro-différentielle

$$(2)\quad x^n z^{(n)} + x^{n-1} p_1(x) z^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) z = f(x) + \int_0^x N(x, s) z(s)\, ds,$$

où

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{m} y_0^{(m-i)} p_{n+i}(x), \qquad N(x, s) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{(x-s)^{i-1}}{(i-1)!} p_{n+i}(x).$$

L'objet de cette Note est l'étude de l'équation (2) qui généralise l'équation (1) de M. Goursat, en supposant que $f(x)$ et $N(x-s)$ sont des fonctions holomorphes *quelconques* pour $|z| \leqq R$ et $|s| \leqq R$.

2. J'ai démontré que *l'équation* (2) *admet une intégrale holomorphe dans le domaine de l'origine, pourvu que l'équation caractéristique*

$$(3)\quad \varphi(r) = r(r-1)\ldots(r-n+1) + p_1(0) r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + p_n(0) = 0$$

n'admette pour racine aucun nombre entier positif.

Une application de ce théorème est le théorème cité au début de cette Note. Une autre application est le théorème suivant :

(¹) Séance du 25 septembre 1933.

(²) *Annales de l'École Normale supérieure*, 12, 1883, p. 261-286.

L'équation intégro-différentielle

$$x^n y^{(n+m)} + x^{n-1} p_1(x) y^{(n+m-1)} + \ldots + x p_{n-1}(x) y^{(m+1)} + p_n(x) y^{(m)} + \ldots + p_{n+m}(x) y$$
$$= \int_0^x M(x, s) y(s)\, ds,$$

où les fonctions $p_i(x)$ et $M(x, s)$ sont holomorphes pour $|x| \leqq R$ et $|s| \leqq R$, admet une intégrale holomorphe dans le domaine de l'origine, sa valeur et celles de ses $m-1$ premières dérivées pouvant être prises arbitrairement pour $x=0$, pourvu que l'équation (3) n'admette pour racine aucun nombre entier positif.

3. Dans le cas où $f(x) = 0$, j'ai démontré le théorème suivant :

L'équation intégro-différentielle (2) *a des intégrales de la forme* $z = x^\lambda h(x)$, *où* λ *est une racine de l'équation* $\varphi(r) = 0$, *et* $h(x)$ *une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine, pourvu que* $\varphi(r+p)$ *soit différent de zéro, pour tout entier p positif, et que la partie réelle de* λ *soit plus grande que* -1.

Dans le cas où l'équation (3) *a des racines multiples*, à chaque racine correspondent m groupes d'intégrales. Par exemple à la racine triple λ, qui satisfait aux conditions précédentes, correspondent les intégrales

$$z_1 = x^\lambda h_{11}(x),$$
$$z_2 = x^\lambda [h_{21}(x) + h_{22}(x) \operatorname{Log} x],$$
$$z_3 = x^\lambda [h_{31}(x) + h_{32}(x) \operatorname{Log} x + h_{33}(x) (\operatorname{Log} x)^2],$$

où les h_{ik} sont des fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine.

4. J'ai fait la démonstration de ces théorèmes par la méthode des approximations successives de M. E. Picard, en prenant comme théorèmes auxiliaires le fait que l'équation de Fuchs avec second membre de la forme

$$(4) \qquad x^{\lambda+r} g(x) \quad \text{ou} \quad x^{\lambda+r}\left[g(x) + \sum_{i=1}^{p} g_i(x) (\operatorname{Log} x)^i\right],$$

où $g(x)$ et $g_i(x)$ sont des fonctions holomorphes pour $|x| \leqq R$, λ est une constante et r un entier positif, admet une intégrale de la même forme que son second membre, pourvu que $\varphi(\lambda + r + p)$ soit différent de zéro pour tout entier p positif ou nul. Ces théorèmes ont été donnés par Fuchs (¹) et par M. A. Kienast (²).

Il est important de signaler qu'à cette occasion j'ai donné des démons-

(¹) *Journal de Crelle*, 68, 1868, p. 354-386.
(²) *Vierteljahrschrift d. Naturforschenden Gesells. in Zürich*, 61, 1916, p. 684-726.

trations de ces théorèmes ainsi que du théorème de Fuchs, avec la méthode des approximations successives de M. E. Picard, en écrivant l'équation de Fuchs sous la forme

$$\begin{aligned} &x^n y^{(n)} + p_1(0)\, x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_n(0)\, y \\ &\quad = \mathrm{F}(x) + x\left[x^{n-1} f_1(n)\, y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)\, y\right], \end{aligned}$$

et en démontrant d'abord que l'équation d'Euler qui a comme second membre une fonction de la forme (4), admet une intégrale de la même forme, pourvu que $\varphi(\lambda + r + p)$ soit différent de zéro pour tout entier p positif ou nul.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur une généralisation de la sommation de M. Borel.* Note [1] de M. **J.-C. Vignaux**, transmise par M. E. Borel.

Dans la présente Note nous donnons une généralisation de la sommation exponentielle de M. Borel, qui jouit de presque toutes les propriétés qu'a la convergence des séries et permet de sommer la série produit de Cauchy de deux séries sommables avec ce procédé.

Soit donnée la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

et supposons que la série

$$\mathrm{U}_{p,r}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^{np+r}}{(np+r)!},$$

où p et r sont deux entiers positifs, définisse une *fonction analytique régulière* pour tout $x \geqq 0$, et considérons l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-x}\, \mathrm{U}_{p,r}(x)\, dx. \tag{2}$$

Quant à la limite de $\Phi(x)$ lorsque $x \to \infty$, elle peut être *finie* avec la valeur S, *infinie* (positive ou négative) ou bien ne pas exister. Dans le premier cas, nous dirons que la série (1) est *convergente* (B_p, r) avec *somme* S, dons le second qu'elle est *divergente* (B_p, r) et dans le dernier cas, que la (1) est *oscillante* (B_p, r). Les numéros

$$\overline{\lim_{x \to \infty}}\, \Phi(x) = \mathrm{S}', \qquad \underline{\lim_{x \to \infty}}\, \Phi(x) = \mathrm{S}''$$

[1] Séance du 12 juin 1933.