

SUR LA DISTRIBUTION DES ZEROS DE CERTAINS POLYNOMES MINIMISANTS

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure.

Note présentée à l'Académie Roumaine par Mr. G. ŢiŢeica, M. A. R.

1. Soit $f(x)$ une fonction réelle, uniforme et définie pour les valeurs $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ de la variable réelle x . Considérons l'expression

$$(1) \quad E(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (f(x_i))^2$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant des coefficients positifs. Parmi tous les polynomes $P(x)$ de degré $m < n$ de la forme $x^m + \dots$ il existe un pour lequel $E(P)$ est minimum. Soit P_m ce polynome, que nous pouvons appeler *polynome minimisant de degré m de l'expression (1)*. Le polynome P_m est tel que pour tout autre polynome $Q(x)$ de degré $< m$ on a

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i P_m(x_i) Q(x_i) = 0$$

On en déduit facilement que

1. Le polynome P_m a tous ses zéros réels, distincts et situés à l'intérieur de l'intervalle (x_1, x_n) .

2. La suite

$$(3) \quad P_m(x_1), P_m(x_2), \dots, P_m(x_n)$$

présente au moins m variations de signes.

Dans la suite (3) nous supprimons les termes nuls. Nous dirons aussi, pour simplifier le langage, que les zéros du polynome $P_m(x)$ séparent les zéros du polynome $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$. Les polynomes $P_m(x)$, $P_n(x)$ ont au plus $n - m - 1$ zéros communs.

2. Soit maintenant l'expression

$$(4) \quad I(f) = \int_a^b p(x) (f(x))^2 dx$$

(a, b) étant un intervalle fini et $p(x)$ une fonction sommable non-négative dans (a, b) . Désignons maintenant par $P_n(x)$ le polynome qui rend minimum l'expression $I(P)$ dans le domaine des polynomes P de degré n de la forme $x^n + \dots$. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ les zéros de P_n qui, nous le savons, sont tous réels et distincts.

Un polynome arbitraire $Q(x)$ de degré $< n$ s'écrit sous la forme

$$Q(x) = P_n(x) \sum_{i=1}^n \left(\frac{Q(x_i)}{(x - x_i) P'_n(x_i)} \right)$$

Compte tenant de la condition d'orthogonalité on a
 $I(Q) = E(Q)$

avec

$$\lambda_i = \int_a^b p(x) \left(\frac{P_n(x)}{(x - x_i) P'_n(x_i)} \right)^2 dx > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Nous en déduisons la propriété suivante:

Les zéros d'un polynome de la suite des polynomes minimisants (polynomes orthogonaux)

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

sont séparés par les zéros de tout polynome qui le précède.

Remarque. La propriété reste vraie si on remplace dans l'expression (4) dx par $da(x)$, $a(x)$ étant une fonction non-décroissante et si on prend des intégrales de STIELTJES (l'expression (1) est de cette forme). On peut aussi considérer un intervalle infini. On choisit, bien entendu, les fonction $a(x)$, $p(x)$ de manière que les intégrales qui interviennent dans la détermination des polynomes minimisants aient un sens (que les moments existent).

3. Soit $F(x)$ un polynome de degré n ayant tous ses zéros réels et distincts et formons la suite de STURM de ce polynome

$$(5) \quad F(x), F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x) \quad \left(F_1(x) = F'(x) \right)$$

KRONECKER a démontré¹⁾ que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de $F(x)$ on a

$$\sum_{i=1}^n \frac{F_k(x_i) F_h(x_i)}{(F'(x_i))^2} = 0 \quad (k \neq h)$$

cé qui montre que la suite (5) est orthogonale, donc.

¹⁾ Voir G. MIGNOSI « Teorema di Sturm e sue estensioni » Rendiconti Circ. Mat. Palermo t. XLIX (1925) p. 84.

Si les zéros du polynôme $F(x)$ sont tous réels et distincts, les zéros d'un polynôme de la suite de STURM (5) sont séparés par les zéros de tout polynôme qui le suit.

Remarque. La propriété reste vraie si $F_1(x)$ est un polynôme de degré $n-1$ dont les zéros séparent ceux de $F(x)$.

4. Considérons plus généralement une suite de fonctions

$$f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$$

uniformes et continues dans l'intervalle (a, b) et supposons que pour tout n et pour toute suite de points $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 \dots < \xi_n$, de (a, b) le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_0(\xi_i) & f_1(\xi_i) & \dots & f_n(\xi_i) \\ i=0, 1, 2, \dots, n \end{vmatrix}$$

soit > 0 . Nous savons alors qu'une combinaison linéaire de la forme

$$(6) \quad \varphi_n = c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$$

($c_0, c_1, \dots, c_n$ constantes)

jouit des propriétés suivantes

1. φ_n est complètement déterminée par ses valeurs en $n+1$ points de l'intervalle (a, b) .
2. φ_n s'annule au plus n fois dans (a, b) .
3. si φ_n s'annule n fois dans (a, b) elle change de signe en chacun de ses zéros.

Soit maintenant l'expression

$$J(f) = \int_a^b p(x) |f(x)|^q dx, \quad q > 1$$

$p(x)$ étant la fonction définie plus haut.

Parmi toutes les combinaisons linéaires de la forme (6), avec $c_n = 1$, il existe une pour laquelle $J(\varphi_n)$ est minimum. Soit $\varphi_n^{(q)}$ cette combinaison linéaire.

Nous avons ¹⁾

$$\int_a^b p | \varphi_n^{(q)} |^{q-1} (\text{sg. } \varphi_n^{(q)}) \varphi_{n-1} dx = 0$$

où φ_{n-1} est une combinaison linéaire quelconque entre les n premières fonctions f_i .

¹⁾ Voir les travaux de M. D. Jackson. Spécialement son livre « The Theory of Approximation » New-York 1930.

Il en résulte que $\varphi_n^{(q)}$ change de signe au moins n fois dans (a, b) . On voit aussi que l'expression

$$\alpha | \varphi_n^{(q)} |^{q-1} \text{sg. } \varphi_n^{(q)} + \beta | \varphi_{n-1}^{(q)} |^{q-1} \text{sg. } \varphi_{n-1}^{(q)}$$

change de signe au moins $n-1$ fois dans (a, b) quel que soient α et β .

De là résulte que $\alpha \varphi_n^{(q)} + \beta \varphi_{n-1}^{(q)}$ change de signe au moins $n-1$ fois dans (a, b) quel que soient α et β . On peut en conclure donc, comme la fait O. D. KELLOGG pour le cas $q = 2^1$, que

Les zéros de $\varphi_n^{(q)}$ sont séparés par ceux de $\varphi_{n-1}^{(q)}$.

5. Considérons encore l'expression $J(f - \varphi_n)$ étant une fonction continue. Parmi toutes les combinaisons linéaires de la forme (6) il existe une — que nous allons désigner par $\Phi_n^{(q)}$ — pour laquelle $J(f - \varphi_n)$ atteint son minimum.

Comme plus haut on montre que la différence

$$|f - \Phi_n^{(q)}|^{q-1} (\text{sg. } (f - \Phi_n^{(q)})) - |f - \Phi_{n-1}^{(q)}|^{q-1} (\text{sg. } (f - \Phi_{n-1}^{(q)}))$$

et par conséquence aussi la différence

$$\Phi_n^{(q)} - \Phi_{n-1}^{(q)}$$

change de signe au moins $n-1$ fois dans (a, b) .

Revenons au cas simple des polynômes, quand la suite des fonctions f_i se réduit à

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

Nous voyons alors que l'équation

$$\Phi_n^{(q)} - \Phi_{n-1}^{(q)} = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Nous savons que si $q \rightarrow \infty$, $\Phi_n^{(q)}$ tend uniformément vers le polynôme de TCHEBYCHEF de degré n de la fonction $f(x)$, donc

Si $T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$ sont les polynômes de TCHEBYCHEF de meilleure approximation de la fonction continue $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) , l'équation de degré n

$$T_n - T_{n-1} = 0$$

a toutes ses racines réelles.

¹⁾ O. D. KELLOGG « The Oscillation of Function of an Orthogonal Set ». Amer. Journ. of Math. XXXVIII (1916) p. 1.