

SUR LES EQUATIONS ALGÈBRIQUES AYANT TOUTES LEURS RACINES RÉELLES

par

Tiberiu Popoviciu

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure.

Reçue le 1 Septembre 1933.

CHAPITRE I.

Sur les équations dont les trois premiers coefficients sont donnés.

1. Considérons la famille d'équations de degré n

$$(1) \quad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

ayant toutes leurs racines réelles et pour lesquelles a_1, a_2 ont des valeurs données. On voit facilement que les racines, donc aussi les autres coefficients, restent bornés.

Nous avons

$$\Delta = (n-1)a_1^2 - 2na_2 \geq 0,$$

l'égalité n'étant possible que si toutes les racines de (1) sont égales.

Les équations (1), prenant les valeurs a_1, a_2 , et ayant au plus deux racines distinctes sont :

$$f_k(x) = \left(x + \frac{ka_1 - \sqrt{k(n-k)\Delta}}{kn} \right)^k \left(x + \frac{(n-k)a_1 + \sqrt{k(n-k)\Delta}}{n(n-k)} \right)^{n-k} = 0$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Si x_i est une racine de l'équation (1) on a

$$(n-2)(a_1 + x_i)^2 - 2(n-1)(a_2 + a_1 x_i + x_i^2) \geq 0$$

l'égalité n'étant possible que si toutes les racines, autres que x_i , sont égales.

Nous avons donc la propriété suivante :

La limite supérieure des racines des équations (1) n'est atteinte que pour l'équation $f_1(x)=0$ et leur limite inférieure seulement pour l'équation $f_{n-1}(x)=0$.

Nous avons pour toute racine x_i

$$-\frac{a_1 + \sqrt{(n-1)\Delta}}{n} \leq x_i \leq -\frac{a_1 - \sqrt{(n-1)\Delta}}{n} \quad (1)$$

Pour que l'équation (1) ait toujours des racines de mêmes signes il faut et il suffit que

$$(n-1)a_1^2 - 2na_2 \geq 0, \quad (n-2)a_1^2 - 2(n-1)a_2 \leq 0.$$

Les racines sont alors toujours non-négatives ou non-positives suivant que $a_1 \leq 0$ ou $a_1 \geq 0$.

2. Remarquons que deux coefficients consécutifs d'une équation ayant toutes ses racines réelles ne peuvent pas être nuls à la fois. De la, en regardant la courbe représentative de l'équation

$$(2) \quad f^{(n-3)}(x) = 0,$$

et tenant compte d'une transformation linéaire éventuelle, on déduit que

Le coefficient a_3 atteint son minimum seulement pour l'équation $f_1(x)=0$ et son maximum seulement pour $f_{n-1}(x)=0$.

Cette propriété n'est autre que la condition de réalité des racines $x_1''' \leq x_2''' \leq x_3'''$ de l'équation (2) et s'exprime explicitement par l'inégalité

$$(3) \quad (n-2)^2\Delta^3 - (n-1)[(n-1)(n-2)a_1^3 - 3n(n-2)a_1a_2 + 3n^2a_3]^2 \geq 0,$$

l'égalité n'étant possible que pour les équations $f_1(x)=0$, $f_{n-1}(x)=0$.

3. Proposons-nous de déterminer le maximum du plus petit intervalle contenant les racines. Ce maximum est nécessairement atteint.

Supposons que l'équation (1) ait au moins quatre racines distinctes

$$(4) \quad \begin{aligned} f(x) &= g(x).P(x) \\ g(x) &= x^{n-4} + b_1x^{n-5} + \dots + b_{n-4} \\ P(x) &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 \\ \delta &< \gamma < \beta < \alpha \end{aligned}$$

(1) Cette propriété a été trouvée par LAGUERRE. Voir „Ouvrages“ t. I, p. 93.

α étant la plus grande et δ la plus petite racine de (1). Nous avons

$$\begin{aligned} c_1 + b_1 &= a_1 \\ c_2 + c_1b_1 + b_2 &= a_2 \\ c_4 + c_3\alpha + c_2\alpha^2 + c_1\alpha^3 + \alpha^4 &= 0 \\ c_4 + c_3\delta + c_2\delta^2 + c_1\delta^3 + \delta^4 &= 0 \end{aligned}$$

Laissons fixe le polynome $g(x)$, nous avons alors un système de quatre équations linéaires en c_1, c_2, c_3, c_4 dont le déterminant est différent de zéro. Remplaçant α, δ par α', δ' respectivement nous avons un nouveau système auquel correspond le polynome $P_1(x)$ ayant pour zéros $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Si α', δ' sont assez voisins de α, δ respectivement, β', γ' sont réels et on a $\delta' < \gamma' < \beta' < \alpha'$. Le polynome $f^*(x) = g(x).P_1(x)$ prend les coefficients donnés a_1, a_2 . Prenant $\alpha' > \alpha, \delta > \delta'$ on voit que le maximum en question ne peut être atteint pour une équation ayant au moins quatre racines distinctes.

Le maximum ne pourra donc être atteint que pour une équation de la forme

$$(5) \quad f(x) = (x-\alpha)^{n_1}(x-\beta)^{n_2}(x-\gamma)^{n_3} = 0 \\ n_1 + n_2 + n_3 = n, \quad \alpha \geq \beta \geq \gamma.$$

Par un procédé analogue à celui employé plus haut, en posant $f(x) = g(x).P(x)$ avec $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, on montre facilement que le maximum ne peut être atteint si $n_1 + n_3 > 2$. Un calcul simple nous montre alors qu'il faut prendre $n_1 = n_3 = 1, \beta = -\frac{a_1}{n}$ donc,

Le plus petit intervalle contenant les racines de l'équation (1) est au plus égal à

$$\sqrt{\frac{2}{n}\Delta}$$

la limite n'étant atteinte que pour l'équation

$$\left(x^2 + \frac{2}{n}a_1x + a_2 - \frac{(n+1)(n-2)}{2n^2}a_1^2\right)\left(x + \frac{a_1}{n}\right)^{n-2} = 0.$$

On peut aussi énoncer cette propriété de la manière suivante :

Si $x_1'' \leq x_2''$ sont les racines de la $(n-2)^{\text{ème}}$ dérivée $f^{(n-2)}(x)=0$, les racines de l'équation (1) sont toutes dans un intervalle de longueur au plus égale à

$$(x_2'' - x_1'') \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

4. Nous pouvons chercher aussi le minimum de la longueur du plus petit intervalle contenant les racines. Mettons l'équation (1) sous la forme (4). Construisons encore le polynôme $f^*(x)$ en posant $\alpha' < \alpha$, $\delta < \delta'$ et si α, δ ne sont pas de zéros simples répétons la même opération sur $f^*(x)$ jusqu'à ce que nous arrivons à un polynôme dont les zéros extrêmes sont simples. On voit de cette façon que le minimum ne peut être atteint que par une équation de la forme (5). Une discussion simple nous montre que le minimum ne peut être atteint que si $\alpha = \beta$ ou $\beta = \gamma$ donc si l'équation a au plus deux racines distinctes.

On trouve facilement que :

Le plus petit intervalle contenant toutes les racines de l'équation (1) est au moins égale à

$$\frac{2}{n} \sqrt{\Delta} \quad \text{si } n \text{ est pair,} \quad \frac{2}{\sqrt{n^2-1}} \sqrt{\Delta} \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

la limite n'étant atteinte que pour l'équation $f_n(x) = 0$ si n est pair et pour les équations $f_{\frac{n-1}{2}}(x) = 0$, $f_{\frac{n+1}{2}}(x) = 0$ si n est impair.

On retrouve encore ces équations si on cherche à déterminer le plus petit intervalle de centre $-\frac{a_1}{n}$ contenant toujours au moins une racine de l'équation (1). Soit en effet $\left(-\lambda - \frac{a_1}{n}, \lambda - \frac{a_1}{n}\right)$ cet intervalle. On montre comme plus haut que pour la détermination de λ il suffit de considérer seulement les équations de la forme (5). Une discussion simple, que nous ne reproduisons pas nous montre que :

L'équation (1) a toujours au moins une racine dans l'intervalle (fermé)

$$\left(-\frac{a_1}{n} - \frac{1}{n} \sqrt{\Delta}, -\frac{a_1}{n} + \frac{1}{n} \sqrt{\Delta}\right) \quad n \text{ pair}$$

$$\left(-\frac{a_1}{n} - \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n-1}{n+1} \Delta}, -\frac{a_1}{n} + \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n-1}{n+1} \Delta}\right) \quad n \text{ impair}$$

CHAPITRE II.

Sur les équations dont les quatre premiers coefficients sont donnés

5. Considérons maintenant l'ensemble des équations (1) ayant leurs racines toutes réelles et pour lesquelles les coefficients a_1, a_2, a_3 sont donnés.

Cherchons à déterminer une équation de la forme

$$(6) \quad (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)^{n-2} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ réels}$$

prenant les coefficients donnés.

Nous avons au plus trois équations de cette forme avec γ réel suivant que cette racine est égale à l'une des racines $x_1''' \leq x_2''' \leq x_3'''$ de l'équation $f^{(n-2)}(x) = 0$.

Ecartons les cas $x_1''' = x_2''' \leq x_3'''$, $x_1''' \leq x_2''' = x_3'''$ où le polynôme (1) est nécessairement de la forme $f_1(x)$ ou $f_{n-1}(x)$.

Supposons donc que

$$(7) \quad x_1''' < x_2''' < x_3'''.$$

Si on a $\gamma = x_2'''$ le polynôme (6) doit nécessairement être identique à

$$f^*(x) = \left[(x-x_2''')^2 + \frac{n}{3} (2x_2''' - x_1''' - x_3''') (x-x_2''') + \frac{n(n-1)}{6} (x_2''' - x_1''') (x_2''' - x_3''') \right] \cdot (x-x_2''')^{n-2}$$

et l'équation $f^*(x) = 0$ a, en vertu de (7), toutes ses racines réelles.

Si la forme (6) est réelle avec $\gamma = x_1'''$ (2) elle est nécessairement identique à

$$\left[(x-x_1''')^2 + \frac{n}{3} (2x_1''' - x_2''' - x_3''') (x-x_1''') + \frac{n(n-1)}{6} (x_1''' - x_3''') (x_1''' - x_2''') \right] \cdot (x-x_1''')^{n-2}$$

d'où la condition de réalité

$$(8) \quad \frac{n^2}{9} (2x_1''' - x_2''' - x_3''')^2 - \frac{2n(n-1)}{3} (x_1''' - x_3''') (x_1''' - x_2''') \geq 0$$

Posons pour simplifier

$$p = \frac{x_3''' - x_2'''}{x_2''' - x_1'''}$$

(2) Nous disons, pour simplifier, que la forme (6) est réelle si α et β sont réels.

qui est un nombre positif. L'inégalité (8) devient

$$(9) \quad \rho \geq \frac{n-3+\sqrt{3(n-1)(n-3)}}{n}.$$

De même nous trouvons que la forme (6) est réelle pour $\gamma = x_3'''$ seulement si

$$(10) \quad \frac{1}{\rho} \geq \frac{n-3+\sqrt{3(n-1)(n-3)}}{n}.$$

Remarquons encore que le second membre des inégalités (9) et (10) croît avec n et tend vers $1+\sqrt{3}$, donc si ρ est à l'extérieur (au sens strict) de l'intervalle

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 1+\sqrt{3}\right) \quad \text{ou} \quad (0,366\dots, 2,732\dots).$$

une des formes (6) avec $\gamma = x_1'''$ ou $\gamma = x_3'''$ est réelle quel que soit le degré du polynome $f(x)$.

6. Toute racine x_i de l'équation doit vérifier une certaine inégalité. Cette inégalité s'obtient de (3) en y remplaçant n, a_1, a_2, a_3 par $n-1, a_1+x_i, a_2+a_1x_i+x_i^2, a_3+a_2x_i+a_1x_i^2+x_i^3$ respectivement. Le maximum et le minimum de x_i annuleront le premier membre de cette inégalité. D'autre part si x_i annule cette expression le polynome (1) est nécessairement de la forme (6). Le maximum et le minimum des racines ne peuvent donc être atteints que par une équation de la forme (6). Cette affirmation est justifiée par le fait qu'il y a toujours au moins une forme réelle (6).

Tenant compte de (9) on vérifie facilement que si (6) est réel avec $\gamma = x_1'''$ les racines de l'équation

$$(x-x_1''')^2 + \frac{n}{3}(2x_1'''-x_2'''-x_3''')(x-x_1''') + \frac{n(n-1)}{6}(x_1'''-x_3''')(x_1'''-x_2''') = 0$$

sont toujours comprises entre les racines de l'équation

$$(x-x_2''')^2 + \frac{n}{3}(2x_2'''-x_1'''-x_3''')(x-x_2''') + \frac{n(n-1)}{6}(x_2'''-x_1''')(x_2'''-x_3''') = 0.$$

On a la même propriété pour la forme (6) avec $\gamma = x_3'''$ si elle est réelle.

On peut donc énoncer la propriété suivante:

Les limites supérieure et inférieure des racines ne sont atteintes que par l'équation $f^ = 0$.*

Nous voyons aussi que les racines de l'équation (1) sont toujours

comprises dans un intervalle de longueur au plus égale à

$$\frac{x_3'''-x_1'''}{3} \sqrt{n^2+2n(n-3)} \frac{\rho}{(1+\rho)^2}$$

Le radical est maximum pour $\rho = 1$, donc

Si x_1''' , x_3''' sont la plus petite et la plus grande racine de la $(n-3)$ ème dérivée $f^{(n-3)}(x)=0$, les racines de l'équation donnée sont toutes dans un intervalle de longueur au plus égale à

$$(x_3'''-x_1''') \sqrt{\frac{n(n-1)}{6}}.$$

7. En regardant la courbe $f^{(n-4)}(x)=0$ nous voyons que le minimum de a_4 n'est atteint que pour l'équation $f^*(x)=0$.

Considérons la fonction symétrique des racines

$$(11) \quad \Sigma (x_i - x_j)^2 (x_i - x_k)^2 (x_k - x_l)^2$$

de l'équation (1).

Cette expression étant de la forme $A-2\Delta a_4$, où A ne dépend que de a_1, a_2, a_3 , sera maximum pour l'équation $f^*(x)=0$. Nous pouvons donc dire que si a_1, a_2 sont donnés (11) est maximum seulement pour une équation de la forme (5) dans laquelle $n_1 = n_3 = 1, n_2 = n-2$. Un calcul simple nous montre alors que ce maximum est atteint seulement si $2\beta = \alpha + \gamma$.

Nous en déduisons donc la propriété suivante:

Si l'équation (1) a toutes ses racines réelles on a

$$\Sigma (x_i - x_j)^2 (x_i - x_k)^2 (x_k - x_l)^2 \leq \frac{n-2}{2n^3} \Delta^3$$

l'égalité n'étant possible que pour l'équation

$$\left(x^2 + \frac{2}{n}a_1x + a_2 - \frac{(n+1)(n-2)}{2n^2}a_1^2\right)\left(x + \frac{a_1}{n}\right)^{n-2} = 0.$$

8. On peut également chercher le maximum du coefficient a_4 . On peut montrer facilement que ce maximum, atteint nécessairement, ne l'est que par une équation de la forme (5). Il est à remarquer que la forme de l'équation maximisante n'est pas invariable et change suivant les valeurs de ρ . Nous n'insistons pas ici sur ce point.

Un des problèmes traités plus haut se généralise sans difficulté comme nous le verrons au Chapitre suivant.

CHAPITRE III.

Sur les racines de l'équation dérivée

9. Désignons par $R(f)$ la plus grande racine (ou l'une d'elles s'il y a plusieurs) de l'équation (1). Nous désignerons donc par $R(f^{(k)})$ la plus grande racine de la $k^{\text{ème}}$ dérivée $f^{(k)}(x)=0$.

D'après un théorème classique on a

$$R(f) \geq R(f') \geq \dots \geq R(f^{(n-1)}).$$

Remarquons que si α_0 est racine d'ordre $k > 1$ de multiplicité de l'équation dérivée il est nécessairement racine d'ordre $k+1$ de l'équation donnée. On en déduit facilement que la seule disposition générale possible est la suivante :

$$R(f) = R(f') = \dots = R(f^{(i)}) > R(f^{(i+1)}) > \dots > R(f^{(n-1)})$$

et alors $R(f)$ est racine d'ordre $i+1$ de multiplicité pour l'équation (1) et $R(f^{(j)})$ est racine simple de l'équation $f^{(j)}(x)=0$ pour $j=i+1, i+2, \dots, n-1$.

Le polynôme (1) est en général de la forme suivante :

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{n_1} (x-\alpha_2)^{n_2} \dots (x-\alpha_k)^{n_k}$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k.$$

L'équation dérivée $f'(x)=0$ a deux sortes de racines. D'abord $k-1$ racines $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}$ distinctes des α_i et séparées par ces dernières

$$\alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > \beta_2 > \dots > \alpha_{k-1} > \beta_{k-1} > \alpha_k$$

et ensuite $n-k$ racines coïncidant avec un α_i .

10. Au point α_i il y a n_i racines. Faisons varier l'une d'elles et examinons la variation des racines de la dérivée.

Si $n_i = 1$ toutes les racines différentes des β_j restent fixes.

Si $n_i > 1$ il y a une racine de la dérivée qui se détache de α_i , mais elle varie évidemment dans le même sens que α_i . Cette racine est donc une fonction croissante de la racine variée de l'équation donnée. Toutes les autres racines distinctes des β_j restent fixes.

Il reste à examiner la variation d'une racine β_j .

Supposons $j \leq i-1$ pour fixer les idées et posons alors

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha_i}$$

On a

$$\phi(\beta_j) \neq 0 \text{ et } \text{sig. } \phi(\beta_j) = \text{sig. } (-1)^{n_1+n_2+\dots+n_i} \quad (3)$$

Mais on a aussi

$$\phi'(\beta_j) (\beta_j - \alpha_i) + \phi(\beta_j) = 0$$

d'où $\phi'(\beta_j) \neq 0$ et comme $\beta_j - \alpha_i > 0$ on trouve

$$\text{sig. } \phi'(\beta_j) = \text{sig. } (-1)^{n_1+n_2+\dots+n_j-1}.$$

Posons maintenant

$$F(x) = \phi(x) (x - \alpha'_i)$$

α'_i étant dans le voisinage de α_i . Nous trouvons

$$F'(\beta_j) = (\alpha_i - \alpha'_j) \phi'(\beta_j)$$

d'où

$$\text{sig. } F'(\beta_j) = \text{sig. } (-1)^{n_1+n_2+\dots+n_j-1} \times \text{sig. } (\alpha_i - \alpha'_i).$$

Mais, dans le voisinage gauche de α_j on a

$$\text{sig. } F'(x) = \text{sig. } (-1)^{n_1+n_2+\dots+n_j-1}$$

et, α'_i étant suffisamment près de α_i , $F'(x) = 0$ a une seule racine dans l'intervalle (α_j, α_{j+1}) [si $j=i-1$ α_i est remplacé ici par α'_i] qui est précisément la racine β_j variée ; soit β'_j . Il en résulte que

$$\text{sig. } (\beta_j - \beta'_j) = \text{sig. } (\alpha_i - \alpha'_i)$$

donc β_j est une fonction croissante de la racine α_i variée.

On obtient la même propriété et on la démontre de la même manière si $j \geq i$.

Nous n'avons donné la démonstration que pour les variations de α_i autour de sa position initiale. Il est facile de voir que la propriété reste vraie pour toute variation de α_i si on a soin de numérotter préalablement les racines de l'équation dérivée et de ne pas changer cette numérotation même si ces racines passent l'une par l'autre.

11. La propriété précédemment démontrée a quelques conséquences intéressantes.

On voit par exemple que si

$$f(x) = g(x) (x-\alpha) h(x)$$

où $g(x)$ est un polynôme fixe de degré k ($k < n-1$) dont les zéros sont au moins égaux à α et $h(x)$ un polynôme dont les zéros sont au

(3) On pose comme d'habitude $\text{sig. } z = 1, 0, -1$ suivant que $z >, =, < 0$.

plus égaux à α , on a

$$R(f') \leq R((g(x)(x-\alpha)^{n-k}'))$$

l'égalité n'étant possible que si $h(x) = (x-\alpha)^{n-k-1}$.

En laissant toujours fixes la racine α et le polynôme $g(x)$ on voit que

$$\min. R(f') = R((g(x)(x-\alpha)')).$$

On approchera en effet indéfiniment ce minimum en faisant tendre vers $-\infty$ les zéros de $h(x)$. On peut aussi éviter les infinis par une transformation simple. Nous pouvons supposer $\alpha > 0$ sans restreindre la généralité. Il suffit alors de faire la transformation $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'équation $f(x) = 0$ et appliquer les résultats du No. précédent à la plus petite racine positive de cette équation.

Nous pouvons énoncer, en particulier, les propriétés suivantes :

Si $n > 2$ et $f(x) = (x-a)(x-b)g(x)$, $a > b$ où les zéros de $g(x)$ sont au plus égaux à b , on a

$$a + \frac{b-a}{n} \geq R(f') > \frac{a+b}{2}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $g(x) = (x-b)^{n-2}$ et la limite inférieure ne pouvant être remplacée par aucun autre nombre plus petit.

Si $n > 3$ et $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)g(x)$, $a > b \geq c$, où les zéros de $g(x)$ sont au plus égaux à c , on a

$$\frac{2(a+b+c) + (n-3)(a+b) + \sqrt{2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]} + (n-3)(n+1)(n-b)^2}{2n} \geq R(f') > \frac{2(a+b+c) + \sqrt{2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}}{6}$$

l'égalité n'étant possible que pour $g(x) = (x-c)^{n-3}$ et la limite inférieure ne pouvant être remplacée par aucun nombre plus petit.

Les résultats du No. précédent s'appliquent aussi aux racines des équations $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$, ... etc. Ce que nous avons dit sur la limitation de $R(f')$ peut facilement être étendu aux racines $R(f'')$, $R(f''')$, ... etc. On peut donc obtenir diverses inégalités pour ces racines comme précédemment. Supposons par exemple que

$$R(f) = R(f') = \dots = R(f^{(k-1)}) > R(f^{(k)})$$

et soit $\phi(x)$ un facteur, non constante, du polynôme $f(x)$. Nous avons

$$R(f^{(i)}) > R(\phi^{(i)}), \quad i \geq k$$

où $i+1$ ne doit pas dépasser le degré du polynôme $\phi(x)$.

LAGUERRE a démontré que si $\alpha < \beta$ sont deux racines consécutives de l'équation (1) il n'y a aucune racine de l'équation dérivée dans les intervalles $\left(\alpha, \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}\right)$, $\left(\beta - \frac{\beta-\alpha}{n}, \beta\right)$. On voit que plus exactement s'il y a k racines à gauche de α ou confondues avec α il n'y a aucune racine de la dérivée dans les intervalles $\left(\alpha, \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n-k}\right)$, $\left(\beta - \frac{\beta-\alpha}{k+2}, \beta\right)$ (4).

12. Soit λ la longueur du plus petit intervalle contenant les racines de l'équation (1). Les racines de l'équation dérivée sont toutes dans un intervalle de longueur au moins égale à λ .

Nous nous proposons de déterminer ce nombre à qui est évidemment plus petit que 1. Sans restreindre la généralité nous pouvons prendre

$$f(x) = (x^2-1)g(x)$$

où les racines de $g(x) = 0$ sont toutes dans l'intervalle $(-1, 1)$; soient α, β la plus grande et la plus petite racine de cette équation et α', β' la plus grande et la plus petite racine de $f'(x) = 0$. Il s'agit de déterminer le minimum de $\alpha' - \beta'$.

Si $\alpha = 1, \beta = -1$ nous avons $\alpha' - \beta' = 2$.

Si $\alpha = 1, \beta > -1$ ou $\alpha < 1, \beta = -1$ d'après les résultats du No. 10 on obtient la plus petite valeur de $\alpha' - \beta'$ pour $(x-1)^{n-1}(x+1) = 0$, $(x-1)(x+1)^{n-1} = 0$ respectivement; d'où

$$\alpha' - \beta' \geq 2 \cdot \frac{n-1}{n}.$$

Supposons maintenant que $\alpha < 1, \beta > -1$. Nous pouvons écrire alors

$$f(x) = \psi(x)(x-\alpha)(x-\beta).$$

En écrivant $f'(\alpha) = 0, f'(\beta) = 0$ nous avons un système de deux équations linéaires en $\alpha + \beta, \alpha\beta$. Si le déterminant de ce système est différent de zéro en appliquant un raisonnement analogue à celui du No. 3 on montre que le polynôme $f(x)$ peut être remplacé par un autre

(4) Ce résultat se déduit aussi de la généralisation donnée au théorème de LAGUERRE par M. J. v. SZ. NAGY: „Ueber algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln“ Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. 27 (1918) p. 37-43.

pour lequel $\alpha' - \beta'$ soit plus petit. On tient compte ici du fait que α', β' sont des racines simples.

Si le déterminant est nul l'une des équations est conséquence de l'autre. Prenant alors

$$F(x) = \psi(x) (x - \gamma)^2$$

$$\alpha' - \gamma = \frac{2(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \beta)}{2\alpha' - \alpha - \beta}$$

on a $\beta < \gamma < \alpha$ et α', β' sont la plus grande et la plus petite racine de $F'(x) = 0$. Nous recommençons alors indéfiniment la même opération. On voit qu'on bien nous tombons sur un déterminant non nul ou bien alors par un passage à la limite on trouve une équation de la forme $(x^2 - 1)(x - \lambda)^{n-2} = 0$ pour laquelle α', β' sont encore la plus grande et la plus petite racine de sa dérivée. En tout cas pour trouver le minimum de $\alpha' - \beta'$ il suffit d'examiner les équations $(x^2 - 1)(x - \lambda)^{n-2} = 0$.

Le minimum a pour valeur $2\sqrt{\frac{n-2}{n}}$ et s'obtient pour $\lambda = 0$.

Nous avons donc la propriété suivante :

Si les racines de l'équation dérivée sont dans un intervalle de longueur λ les racines de l'équation donnée sont toutes dans un intervalle de longueur au plus égale à

$$\lambda \sqrt{\frac{n}{n-2}}.$$

On voit d'ailleurs qu'on peut énoncer plus généralement la propriété suivante :

Si les racines de la k ème dérivée $f^{(k)}(x) = 0$ sont toutes dans un intervalle de longueur λ les racines de l'équation donnée sont toutes dans un intervalle de longueur au plus égale à

$$\lambda \sqrt{\frac{n(n-1)}{(n-k)(n-k-1)}}^{(5)}.$$

C'est la généralisation des cas $k = n-2$, $k = n-3$ déjà signalés aux Chap. I et II.

(5) Je vient de prendre connaissance du mémoire de M. J. v. SZ. NAGY, loc. cit. (4), malheureusement après avoir fait les corrections. Ces résultats sont dus à M. J. v. SZ. NAGY.

CHAPITRE IV.

Sur l'inégalité de M. I. Schur

13. Considérons la famille des équations (1) pour lesquelles $R(f)$ et $R(f')$ ont des valeurs données. Proposons-nous de déterminer le maximum de $R(f'')$.

Si $R(f) = R(f')$ on a évidemment $\max R(f'') = R(f')$ et ce maximum est atteint par toute équation pour laquelle $R(f)$ est racine au moins triple.

Si $R(f) > R(f')$ nous pouvons prendre, sans restreindre la généralité, $R(f) = 1$, $R(f') = 0$.

Supposons que l'équation (1) ait au moins deux racines distinctes de $R(f) = 1$. Nous pouvons écrire la décomposition (4) avec

$g(x)$ = polynome de degré $n-1$

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + c_1x + c_2, \quad 1 > \alpha > \beta.$$

Nous avons le système

$$(12) \quad \begin{aligned} c_1g'(0) + c_2g(0) &= 0 \\ [x^2g(x)]_{x=\xi}'' + c_1[xg(x)]_{x=\xi}' + c_2[g(x)]_{x=\xi}' &= 0, \quad \xi = R(f'') \end{aligned}$$

de deux équations linéaires en c_1, c_2 .

Si le déterminant de ce système est différent de zéro on peut, par suite de la continuité, déterminer un polynome $P_1(x) = (x - \alpha_1)(x - \beta_1)$ tel que si $F(x) = (x) \cdot P_1(x)$ on ait

$$R(F) = 1, R(F') = 0, R(F'') > R(f'').$$

Si le déterminant est nul la seconde équation (12) est conséquence de la première. Dans ce cas lorsque β décroît vers $-\infty$ α croît vers une limite qui est déterminée par l'équation $\alpha g(0) - g'(0) = 0$. Nous avons $g(0) \neq 0$ [donc aussi $g'(0) \neq 0$] c'est-à-dire que

$$\lim. \alpha = \frac{g'(0)}{g(0)}.$$

On voit alors que si

$$G(x) = g(x) \left[x - \frac{g'(0)}{g(0)} \right]$$

on a

$$R(G) = R(f), R(G') = R(f'), R(G'') = R(f'').$$

14. Nous pouvons déterminer maintenant le maximum de $R(f'')$.

Remarquons qu'une équation de la forme

$$(13) \quad f(x) = (x-a)(x-b)^m = 0$$

est complètement déterminée par les conditions $R(f) = 1$, $R(f') = 0$. Nous avons alors $a = 1$, $b = -m$ et $R(f'') = -1$ quel que soit m .

Soit $n = 3$. Nous avons $g(x) = x-1$ et le déterminant du système (12) est différent de zéro. Le maximum n'est donc atteint que pour l'équation $(x-1)(x+2)^2 = 0$.

Nous démontrerons la propriété suivante :

Le maximum de $R(f'')$ ne peut être atteint que par les équations de la forme (13).

De la propriété démontrée au No. précédent on voit que le maximum est atteint ou bien pour l'équation $(x-1)(x+n-1)^{n-1} = 0$ ou bien pour une équation de degré $< n$.

Nous ferons la démonstration par récurrence. Nous avons vu que la propriété est vraie pour les degrés 3, 4, ..., $n-1$ et démontrons-la pour le degré n . Choissant convenablement les racines α et β on voit que la propriété est démontrée par récurrence.

Cette propriété est due à M. I. SCHUR ⁽⁶⁾ qui l'a énoncé de la manière suivante :

Si l'équation (1) a toutes ses racines réelles on a l'inégalité

$$R(f) - R(f') \leq R(f') - R(f'')$$

l'égalité n'étant possible — en dehors du cas trivial $R(f) = R(f') = R(f'')$ — que pour les équations de la forme

$$(x-a)(x-b)^m = 0.$$

15. On peut étendre un peu le résultat précédent au cas où $R(f) = R(f') = \dots = R(f^{(i)}) > R(f^{(i+1)})$ sont données. On montre encore, comme plus haut, que le maximum de $R(f^{(i+2)})$ ne peut être atteint que par une équation de la forme

$$[x-R(f)]^{i+1}(x-b)^{n-i-1} = 0, \quad R(f) > b.$$

Une telle équation est complètement déterminée par les valeurs données. En effet, s'il y en avait deux on pourrait transformer l'une dans l'autre par une transformation linéaire simple et on tomberait sur une contradiction avec la propriété de croissance démontrée au No. 10.

Il est clair que le minimum du rapport

$$\frac{R(f^{(i)}) - R(f^{(i+2)})}{R(f^{(i)}) - R(f^{(i+1)})}$$

⁽⁶⁾ I. SCHUR „Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln“, Journal für Math. B. 144 (1914) pp. 75—88.

s'obtient en calculant sa valeur pour l'équation $(x-1)^{i+1}x^{n-i-1} = 0$ par exemple.

En particulier, pour $i = 1$ on obtient la propriété suivante :

Si l'équation (1) a toutes ses racines réelles et si $R(f) = R(f') > R(f'')$

on a

$$\frac{R(f') - R(f''')}{R(f') - R(f'')} \geq \frac{3\sqrt{n-1} - \sqrt{3(n-3)}}{2\sqrt{n-1} - \sqrt{2(n-2)}}$$

l'égalité n'étant possible que pour les équations de la forme

$$(x-a)^2(x-b)^{n-2} = 0. \quad a > b.$$

16. Proposons-nous de déterminer une équation de la forme

$$(14) \quad f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)^{n-2} = 0$$

prenant les valeurs données $R(f)$, $R(f')$, $R(f'')$.

Le cas $R(f'') = 2R(f') - R(f)$ a été déjà mis en évidence et nous savons qu'alors l'équation (14) est complètement déterminée. Il en est de même si $R(f) = R(f')$.

Supposons donc que $R(f'') < 2R(f') - R(f)$, $R(f) > R(f')$.

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que $R(f) = 1$, $R(f') = 0$ et alors $R(f'') = \xi < -1$. L'équation (14) devient

$$(15) \quad f(x) = (x-1)(x-\lambda) \left(x + \frac{(n-2)\lambda}{1+\lambda} \right)^{n-2} = 0.$$

Si nous écrivons que $f''(x)$ débarrassé du facteur $\left(x + \frac{(n-2)\lambda}{1+\lambda} \right)^{n-4}$ s'annule pour $x = \xi$ nous obtenons une équation de la forme

$$(16) \quad p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s = 0$$

pour déterminer λ . On a ainsi négligé la valeur -1 de λ quand (15) tend vers une équation du second degré.

Faisant les calculs on trouve

$$\begin{aligned} p &= -(n-1)(n-2)(\xi+1) \\ q &= n(n-1)\xi^2 + (n-1)(n-2)\xi - 2(n-2) \\ r &= 2n(n-1)\xi^2 + (n-1)(n-2)\xi - (n-1)(n-2) \\ s &= (n-1)\xi[n\xi - (n-2)]. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation (17) est de la forme

$$(17) \quad \lambda_0\xi^6 + \lambda_1\xi^5 + \lambda_2\xi^4 + \lambda_3\xi^3 + \lambda_4\xi^2 + \lambda_5\xi + \lambda_6$$

en supprimant le cas $p = 0$ qui conduit à $\xi = -1$, cas que nous avons déjà étudié.

Nous avons

$$\lambda_0 = -8n^2(n-1)^3(n-2)^3$$

$$\lambda_4 = 4n(n-1)(n-2)^3(5n^3-29n^2+60n-44)$$

$$\lambda_5 = -8n(n-1)(n-2)^5(n+3)$$

$$\lambda_6 = 4n(n-1)^2(n-2)^5$$

ce qui montre que la suite

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$$

présente au moins trois variations. Il en résulte que le polynôme (17) a au plus trois zéros négatifs.

On vérifie d'abord que (17) s'annule pour $\xi = -1$.

Considérons l'équation (14) et le rapport

$$(18) \quad \frac{R(f') - R(f'')}{R(f) - R(f')}.$$

Supposons a et $c < a$ fixes et faisons varier b de a jusqu'à $-\infty$. Le rapport (18) décroît de $+\infty$ jusqu'à la valeur 1 pour $b=c$ qui est un minimum. Après il croît jusqu'à un maximum pour décroître ensuite vers a pour $b = -\infty$.

Il en résulte que $R(f)$, $R(f')$, $R(f'')$ étant données il existe toujours au moins une équation de la forme (14) avec $a \geq b \geq c$ prenant ces valeurs.

Il en résulte encore qu'il existe un nombre $\xi_1 < -1$ tel que pour ξ compris dans $(-1, \xi_1)$ l'équation (16) ait trois racines réelles dont deux sont $< -(n-1)$. Si $\xi = \xi_1$ l'équation (16) a une racine double plus petite que $-(n-1)$.

Remarquons que (35) donne aussi les valeurs de λ pour lesquelles ξ n'est plus la plus grande racine de la dérivée seconde mais l'autre racine différente de la racine multiple.

L'examen du rapport (18) nous montre l'existence d'un nombre $\xi_2 \leq \xi_1$ tel que si $\xi < \xi_2$ l'équation (16) ait encore trois racines réelles dont deux donnent des équations pour lesquelles ξ n'est pas la plus grande racine de la dérivée seconde. Pour $\xi = \xi_2$ l'équation (16) a une racine double qui jouit de la même propriété.

Nous avons ainsi mis en évidence les trois zéros négatifs -1 , ξ_1 , ξ_2 du discriminant. On peut montrer qu'on a effectivement $\xi_2 < \xi_1$. En tout cas le discriminant ne peut s'annuler entre ξ_1 et ξ_2 et change de signe en passant par ces points. Il en résulte que pour ξ compris dans l'intervalle (ξ_1, ξ_2) l'équation (16) n'a qu'une seule racine réelle.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition que nous avons en vue.

Une équation de la forme (15) avec $a \geq b \geq c$ est complètement déterminée par la connaissance des valeurs $R(f')$, $R(f'')$, $R(f''')$.

On peut facilement voir de la propriété précédente que si on considère l'équation (14) avec $a \geq b \geq c$ dans laquelle $R(f)$, $R(f')$ sont données, la racine $R(f'')$ est fonction décroissante de b et fonction croissante de c .

Les résultats précédents peuvent s'étendre au cas où au lieu de la plus grande racine de la dérivée seconde on prend la plus grande racine de la troisième, quatrième, ... dérivée.

Dans la suite nous montrerons les propriétés extrémales des équations de la forme (14) et nous déterminerons en particulier le maximum de $R(f''')$ quand $R(f)$, $R(f')$ et $R(f'')$ sont données.