

SUR UNE CONDITION SUFFISANTE POUR QU'UN POLYNOME SOIT POSITIF

par

Tiberiu Popoviciu

à Cluj.

Reçu le 5 Mai 1935.

1. — Considérons un polynome de degré $2m$ que nous allons écrire sous la forme suivante

$$f(x) = a_0 c_0 + a_1 c_1 x + \dots + a_k c_k x^k + \dots + a_{2m} c_{2m} x^{2m}$$

où $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots, a_m$ sont des constantes positives et c_i des coefficients réels.

Mettons ce polynome sous la forme

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \left[\alpha_i c_{2i} x^{2i} \left(1 + \beta_i \frac{c_{2i+1}}{c_{2i}} x \right)^2 + \gamma_i \frac{\frac{1}{\lambda^2} c_{2i} c_{2i+2} - c_{2i+1}^2}{c_{2i}} x^{2i+2} \right] + \alpha_m c_{2m} x^{2m}$$

et déterminons les constantes $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ par identification. Nous obtenons

$$\alpha_0 = a_0, \quad 2\alpha_i \beta_i = a_{2i+1}, \quad \beta_i^2 \alpha_i = \gamma_i, \quad \alpha_{i+1} + \frac{\gamma_i}{\lambda^2} = a_{2i+2} \\ i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Les constantes α_i sont donc déterminées par les relations de récurrence

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_{i+1} + \frac{a_{2i+1}^2}{4\lambda^2 \alpha_i} = a_{2i+2}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Nous pouvons écrire

$$\alpha_i = \frac{\dot{P}_{i+1}(\lambda)}{\lambda P_i(\lambda)}$$

et alors $P_k(\lambda)$ est un polynome de degré k en λ .

Ces polynomes vérifient les relations de récurrence

$$P_0(\lambda) = 1, \quad P_1(\lambda) = a_0 \lambda, \quad P_{i+2}(\lambda) - \lambda a_{2i+2} P_{i+1}(\lambda) + \frac{a_{2i+1}^2}{4} P_i(\lambda) = 0$$

Posons

$$Q_0(\lambda) = P_0(\lambda), \quad Q_i(\lambda) = \frac{P_i(\lambda)}{a_0 a_2, \dots, a_{2i-2}}$$

nous avons alors

$$Q_0(\lambda) = 1, \quad Q_1(\lambda) = \lambda, \quad Q_{i+2}(\lambda) - \lambda Q_{i+1}(\lambda) + \frac{a_{2i+1}^2}{4a_{2i}a_{2i+2}} Q_i(\lambda) = 0$$

Le polynôme $Q_k(\lambda)$ a tous ses zéros réels et les zéros de $Q_{k+1}(\lambda)$ sont séparés par ceux de $Q_k(\lambda)$.

Pour que les constantes α_i soient toutes positives il faut que λ soit plus grand que le plus grand zéro de $Q_{m+1}(\lambda)$. Dans ce cas les constantes β_i et γ_i sont aussi toutes positives.

On voit donc que si l'on a

$$c_0 > 0, \quad \frac{1}{\lambda^2} c_{2i} c_{2i+2} - c_{2i+1}^2 > 0 \\ (i=0, 1, \dots, m-1)$$

où λ est au moins égale à la plus grande racine λ_{m+1} de l'équation $Q_{m+1}(\lambda)=0$, le polynôme $f(x)$ est positif.

2. — La limite trouvée λ_{m+1} est la meilleure possible. On peut le voir directement, ou bien de la manière suivante :

Posons

$$c_{2i} = x_i^2, \quad \frac{1}{\lambda^2} c_{2i} c_{2i+2} - c_{2i+1}^2 = 0, \quad c_{2i+1} = -\frac{1}{\lambda} x_i x_{i+1} \\ i=0, 1, \dots, m \quad (x_i \neq 0) \quad i=0, 1, \dots, m-1$$

et déterminons λ de la manière que l'équation $f(x)=0$ puisse avoir au moins une racine réelle. On voit immédiatement qu'il suffit d'examiner les cas où $+1$ est une racine de cette équation. Nous avons alors

$$a_0 x_0^2 + a_2 x_1^2 + \dots + a_{2m} x_m^2 = \frac{1}{\lambda} (a_1 x_0 x_1 + a_3 x_1 x_2 + \dots + a_{2m-1} x_{m-1} x_m)$$

ou

$$\lambda = \frac{a_1 x_0 x_1 + a_3 x_1 x_2 + \dots + a_{2m-1} x_{m-1} x_m}{a_0 x_0^2 + a_2 x_1^2 + \dots + a_{2m} x_m^2}$$

λ doit donc être compris entre le maximum et le minimum du second membre, autrement dit entre le maximum et le minimum de la forme

quadratique $\sum_{i=0}^{m-1} a_{2i+1} x_i x_{i+1}$ lorsque les variables sont liées par la relation

$$\sum_{i=0}^m a_{2i} x_i^2 = 1.$$

Il en résulte que λ est compris entre la plus petite et la plus grande racine de l'équation caractéristique

$$R_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} -2xa_0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & -2xa_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & -2xa_4 & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{2m-1} - 2xa_{2m} \end{vmatrix} = 0.$$

On voit immédiatement que

$$R_1(x) = -2xa_0, \quad R_2(x) = 4a_0 a_2 \left(x^2 - \frac{a_1^2}{4a_0 a_2} \right) \\ R_{i+2}(x) + 2xa_{2i+2} R_{i+1}(x) + a_{2i+1}^2 R_i(x) = 0.$$

Il en résulte que

$$R_i(x) = (-1)^i 2^i a_0 a_2 \dots a_{2i-2} Q_i(x).$$

La propriété énoncée résulte de cette identité.

3. — Examinons quelques cas particuliers de ce problème. Supposons d'abord que

$$a_i = a_1 = \dots = a_{2m} = 1.$$

Le polynôme $Q(x)$ n'est autre que le polynôme trigonométrique

$$Q_i(x) = \frac{\sin(i+1) \arccos x}{2^i \sqrt{1-x^2}}$$

et nous avons alors

$$\lambda_{m+1} = \cos \frac{\pi}{m+2}.$$

Nous en déduisons donc la propriété suivante :

Si les coefficients $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2m}$ du polynôme

$$(1) \quad c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{2m} x^{2m}$$

vérifient les inégalités

$$c_0 > 0, \quad \mu c_{2i} c_{2i+2} - c_{2i+1}^2 > 0, \quad i=0, 1, \dots, m-1$$

où $\mu \leq \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{m+2}}$, ce polynôme est positif.

Si $\mu > \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{m+2}}$ la propriété n'est plus vraie. On peut d'ail-

leurs montrer que dans ce cas le polynôme, tout en vérifiant les inégalités écrites, peut changer de signe.

En particulier, en prenant $\mu=1$, nous avons le théorème suivant, dû à M. E. B. VAN VLECK ⁽¹⁾.

Si les coefficients c_i vérifient les inégalités

$$c_0 > 0, \quad c_{2i} c_{2i+2} - c_{2i+1}^2 > 0, \quad i=0, 1, \dots, m-1$$

le polynôme (1) est positif.

4. — En particulierisant les valeurs de $a_0, a_1, \dots, a_{2m}$ on trouve divers énoncés.

Si nous prenons

$$a_0=1, \quad a_1=a_2=\dots=a_{2m}=2$$

le polynôme $Q_i(x)$ devient le polynôme trigonométrique

$$Q_i(x) = \frac{\cos i(\arccos x)}{2^{i-1}}$$

et nous avons alors

$$\lambda_{m+1} = \cos \frac{\pi}{2(m+1)}$$

qui nous donne l'énoncé suivant:

Si les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_{2m}$ du polynôme (1) vérifient les inégalités

$$c_0 > 0, \quad 2\mu c_0 c_2 - c_1^2 > 0, \quad \mu c_{2i} c_{i+2} - c_{2i+1}^2 > 0, \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

où $\mu \leq \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2(m+1)}}$, ce polynôme est positif.

Il est à remarquer que ce critère est distinct du précédent. On a en effet

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{m+2}} > \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2(m+1)}}, \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{m+2}} < \frac{2}{\cos^2 \frac{\pi}{2(m+1)}} \quad (\text{pour } m > 1).$$

Signalons encore un cas. Si

$$a_i = i+1, \quad i=0, 1, 2, \dots, 2m$$

⁽¹⁾ E. B. VAN VLECK „A sufficient condition for the maximum number of imaginary roots of an equation of the n -th degree“ *Annals of Math.* (2), t. 4 (1902—03) p. 191.

$Q_i(x)$ n'est autre (à un facteur constant près) que le polynôme de LEGENDRE de degré i

$$Q_i(x) = \frac{(2i)!}{i!} \frac{d^i}{dx^i} (x^2-1)^i.$$

Nous trouvons donc une propriété qu'on peut énoncer sous la forme suivante:

Si les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_{2m}$ du polynôme (1) vérifient les inégalités

$$c_0 > 0, \quad \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{4(i+1)^2}{(2i+1)(2i+3)} c_{2i} c_{2i+2} - c_{2i+1}^2 > 0, \quad i=0, 1, \dots, m-1$$

où λ est au moins égal au plus grand zéro du polynôme de LEGENDRE de degré $m+1$, ce polynôme est positif.

5. — Considérons maintenant le cas où

$$a_i = \binom{2m}{i}, \quad i=0, 1, \dots, 2m.$$

On sait que si l'équation $f(x)=0$ a toutes ses racines réelles on a

$$c_{2i+1}^2 - c_{2i} c_{2i+2} \geq 0, \quad i=0, 1, \dots, m-1.$$

Si on considère le polynôme sous la forme (1) ces inégalités s'écrivent sous la forme suivante:

$$\frac{4(i+1)(m-i)}{(2i+1)(2m-2i-1)} c_{2i} c_{2i+2} - c_{2i+1}^2 \leq 0, \quad i=0, 1, \dots, m-1.$$

On obtient donc une propriété contraire en appliquant les résultats précédents. Dans ce cas λ_{m+1} est la plus grande racine de l'équation

$$S_{m+1}(x) = \begin{vmatrix} -b_0 x & \gamma_m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & -b_1 x & \gamma_{m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -b_2 x & \gamma_{m-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{m-1} & -b_{m-1} x & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_m & -b_m x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} b_i = (2i+1)(2m-2i+1) \\ \gamma_i = i(2i+1) \end{cases}$$

Nous avons donc la propriété suivante:

Si les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_{2m}$ du polynôme (1) vérifient les inégalités

$$c_0 > 0, \quad \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{4(i+1)(m-i)}{(2i+1)(2m-2i-1)} c_{2i} c_{2i+2} - c_{2i+1}^2 > 0, \quad i=0, 1, \dots, m-1.$$

où, λ est au moins égal à la plus grande racine de l'équation $S_{m+1}(x)=0$, ce polynôme est positif.

6. — Examinons en particuliers les cas $m=2, 3, 4$.

Soit $m=2$. Si l'équation

$$(2) \quad c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 = 0$$

a toutes ses racines réelles on a

$$8c_0c_2 - 3c_1^2 \leq 0, \quad 8c_2c_4 - 3c_3^2 \leq 0.$$

Dans ce cas $S_3(x) = -3(3x^3 - 4x)$. L'équation (2) aura donc toutes ses racines imaginaires si

$$c_0 > 0, \quad 8\mu c_0c_2 - 3c_1^2 > 0, \quad 8\mu c_2c_4 - 3c_3^2 > 0$$

où $\mu \leq \frac{3}{4} = 0,75$.

Soit $m=3$. Si l'équation

$$(3) \quad c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 = 0$$

a toutes ses racines réelles on a

$$12c_0c_2 - 5c_1^2 \leq 0, \quad 16c_2c_4 - 9c_3^2 \leq 0, \quad 12c_4c_6 - 5c_5^2 \leq 0.$$

Dans ce cas $S_4(x) = 225x^4 - 370x^2 + 81$. L'équation (3) a donc toutes ses racines imaginaires lorsque

$$c_0 > 0, \quad 12\mu c_0c_2 - 5c_1^2 > 0, \quad 16\mu c_2c_4 - 9c_3^2 > 0, \quad 12\mu c_4c_6 - 5c_5^2 > 0$$

où $\mu \leq \frac{5(37-8\sqrt{10})}{81} = 0,7223\dots$

Soit enfin $m=4$. Si l'équation

$$(4) \quad c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 = 0$$

a toutes ses racines réelles on a

$$16c_0c_2 - 7c_1^2 \leq 0, \quad 8c_2c_4 - 5c_3^2 \leq 0, \quad 8c_4c_6 - 5c_5^2 \leq 0, \quad 16c_6c_8 - 7c_7^2 \leq 0.$$

Dans ce cas $S_5(x) = 45x(7x^2 - 4)(69 - 35x^2)$. L'équation (4) a donc toutes ses racines imaginaires si

$$c_0 > 0, \quad 16\mu c_0c_2 - 7c_1^2 > 0, \quad 8\mu c_2c_4 - 5c_3^2 > 0,$$

$$8\mu c_4c_6 - 5c_5^2 > 0, \quad 16\mu c_6c_8 - 7c_7^2 > 0$$

où $\mu \leq \frac{35}{69} = 0,5072\dots$

7. — Considérons un polynôme de degré $2m+1$

$$F(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{2m+1}x^{2m+1}.$$

Nous avons

$$x^{2m+1} F\left(\frac{1}{x}\right) = c_0x^{2m+1} + \dots + c_{2m+1}.$$

Prenant la dérivée, nous voyons que si

$$(5) \quad (2m+1)c_0 + 2mc_1x + \dots + c_{2m}x^{2m}$$

est positif le polynôme $F(x)$ change au plus une fois de signe. Plus exactement il n'admet qu'un seul zéro réel.

Le polynôme (5) étant positif, on peut appliquer le résultat du No. 4 et nous avons la propriété suivante:

Si les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_{2m}$ de l'équation

$$(6) \quad c_0 + c_1x + \dots + c_{2m+1}x^{2m+1} = 0$$

vérifient les inégalités

$$c_{2m} > 0, \quad (c_0 > 0), \quad \frac{1}{\lambda^2} c_{2i} c_{2i+2} - c_{2i+1}^2 > 0, \quad i=0, 1, \dots, m-1$$

où λ est au moins égal au plus grand zéro du polynôme de LEGENDRE de degré $m+1$, l'équation a au plus une racine réelle.

En particulier, nous en déduisons le second théorème de M. E. B. VAN VLECK (2).

Si les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_{2m}$ de l'équation (6) vérifient les inégalités

$$c_0 > 0, \quad c_{2i} c_{2i+2} - c_{2i+1}^2 > 0, \quad i=0, 1, \dots, m-1$$

cette équation a au plus une racine réelle.

8. — Considérons l'équation de degré n .

$$(7) \quad g(x) = c_0 + \binom{n}{1} c_1 x + \dots + \binom{n}{k} c_k x^k + \dots + c_n x^n = 0.$$

Soient j, r deux entiers positifs tels que $j \geq 0, j+2r \leq n$, et prenons la dérivée d'ordre j de $g(x)$

$$g^{(j)}(x) = \frac{n!}{(n-j)!} \left[c_j + \binom{n-j}{1} c_{j+1} x + \dots + c_n x^{n-j} \right].$$

Considérons la transformée en $\frac{1}{x}$ (laissant de côté un facteur

(2) loc cit (1).

constant)

$$g_1(x) = c_j x^{n-j} + \binom{n-j}{1} c_{j+1} x^{n-j-1} + \dots + c_n$$

et prenons la dérivée d'ordre $n-j-2r$ de ce polynôme

$$g_1^{(n-j-2r)}(x) = \frac{(n-j)!}{(2r)!} \left[c_j x^{2r} + \binom{2r}{1} c_{j+1} x^{2r-1} + \dots + c_{j+2r} \right].$$

Soit enfin

$$g_2(x) = c_j + \binom{2r}{1} c_{j+1} x + \dots + \binom{2r}{k} c_{j+k} x^k + \dots + c_{j+2r} x^{2r}.$$

Supposons que l'équation (7) ait p racines réelles. L'équation $g^{(j)}(x)=0$, donc aussi $g_1(x)=0$, a alors au moins $p-j$ racines réelles.

On en déduit que l'équation $g_2(x)=0$ a au moins $p-n+2r$ racines réelles. Il en résulte que si le polynôme $g_2(x)$ a toutes ses racines imaginaires l'équation (7) a au plus $n-2r$ racines réelles.

Les résultats du No. 5 permettent donc d'énoncer la propriété générale suivante :

Si $j=0$, $j+2r \leq n$ et si les coefficients c_i de l'équation (7) vérifient les inégalités

$$c_j > 0, \quad \frac{1}{\lambda^2} c_{j+2i} c_{j+2i+2} - c_{j+2i+1}^2 > 0, \quad i=0, 1, \dots, r-1$$

où, λ est au moins égal à la plus grande racine de l'équation $S_{r+1}(x)=0$, cette équation (7) a au plus $n-2r$ racines réelles. On peut aussi dire que dans ce cas l'équation (7) a au moins r couples de racines imaginaires conjuguées.

Pour $r=1$ nous avons cette propriété, évidente a priori, que si l'on peut trouver un j tel que

$$c_j > 0, \quad c_j c_{j+2} - c_{j+1}^2 > 0$$

l'équation (7) a au moins un couple de racines imaginaires conjuguées.

Pour $r=2$, nous trouvons que si

$$c_j > 0, \quad \mu c_{j+2i} c_{j+2i+2} - c_{j+2i+1}^2 > 0, \quad i=0, 1$$

$$\mu \leq \frac{3}{4} = 0,75, \quad (j \geq 0, \quad j+4 \leq n)$$

l'équation (7) a au moins deux couples de racines imaginaires conjuguées.

Pour $r=3, 4$ nous trouvons de même des conditions suffisantes analogues pour l'existence de trois ou quatre couples de racines ima-

ginaires conjuguées. Les valeurs des coefficients μ qui entrent dans les inégalités respectives sont celles précisées dans le No. 6.

9. — Enfin si nous écrivons l'équation (7) sous la forme

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n = 0$$

le polynôme $g_2(x)$ s'écrira sous la forme

$$\frac{1}{\binom{n}{j}} c_j + \frac{\binom{2r}{1}}{\binom{n}{j+1}} c_{j+1} x + \dots + \frac{\binom{2r}{k}}{\binom{n}{j+k}} c_{j+k} x^k + \dots + \frac{1}{\binom{n}{j+2r}} c_{j+2r} x^{2r}.$$

Portons notre attention sur le cas où $j=0$. Le polynôme précédent peut alors s'écrire sous la forme suivante

$$(2r+1)(2r+2) \dots n c_j + 2r(2r+1) \dots (n-1) c_{j+1} x + \dots + (2r-k+1)(2r-k+2) \dots (n-k) c_{j+k} x^k + \dots + 1, 2 \dots (n-2r) c_{j+2r} x^{2r}.$$

Posant

$$m=r, \quad a_i = (i+1)(i+2) \dots (n-2r+i), \quad i=0, 1, \dots, 2r$$

le polynôme $Q_i(\lambda)$ correspondant est donné par les relations de récurrence

$$(8) \quad Q_0(\lambda)=1, \quad Q_1(\lambda)=\lambda, \quad Q_{i+2}(\lambda)-\lambda Q_{i+1}(\lambda) + \frac{(i+1)(n-2r+2i+1)}{2(2i+1)(n-2r+2i+2)} Q_i(\lambda)=0.$$

Nous avons donc la propriété suivante :

Si $j \geq 0$, $j+2r \leq n$ et si les coefficients c_i de l'équation

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = 0$$

vérifient les inégalités

$$c_j > 0, \quad \frac{1}{\lambda^2} c_{j+2i} c_{j+2i+2} - c_{j+2i+1}^2 > 0, \quad i=0, 1, \dots, r$$

où, λ est au moins égal au plus grand zéro du polynôme $Q_{r+1}(\lambda)=0$ défini par les relations (8), cette équation a au plus $n-2r$ racines réelles.

La plus grande racine de l'équation $Q_{r+1}(\lambda)=0$ ne dépend pas de j et est bornée supérieurement. Il en résulte en effet d'un théorème connu⁽³⁾ que les zéros de $Q_{r+1}(\lambda)$ sont en module au plus égaux à

$$\max. (\sqrt{b_2} + \sqrt{b_3}, \sqrt{b_3} + \sqrt{b_4}, \dots, \sqrt{b_r} + \sqrt{b_{r+1}})$$

⁽³⁾ Voir par ex. WOLFGANG HAHN „Bericht über die Nullstellen der Laguerreschen und der Hermite'schen Polynome“ *Jahresbericht d. D. M. V.* Bd. 44 p. 215—236, sp. p. 227.

où

$$b_{i+2} = \frac{(i+1)(2i+n-2r+1)}{2(2i+1)(2i+n-2r+2)}, \quad i=0, 1, \dots, r-1.$$

On voit immédiatement que ($n > 2r$)

$$b_2 > b_3 > \dots > b_{r+1}.$$

La plus grande racine de l'équation $Q_{r+1}(\lambda) = 0$ est donc au plus égale à

$$\sqrt{b_2} + \sqrt{b_3} = \sqrt{\frac{\alpha+1}{2(\alpha+2)}} + \sqrt{\frac{\alpha+3}{3(\alpha+4)}} < \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} = 1, 24 \dots$$

On peut d'ailleurs démontrer que la vraie limite supérieure en question est > 1 . En effet, si nous faisons tendre n vers ∞ nous obtenons les polynômes

$$Q_0(\lambda) = 1, \quad Q_1(\lambda) = (\lambda), \quad Q_{i+2}(\lambda) - \lambda Q_{i+1}(\lambda) + \frac{i+1}{2(2i+1)} Q_i(\lambda) = 0,$$

et nous en déduisons

$$Q_0(1) = 1, \quad Q_1(1) = 1, \quad Q_2(1) = \frac{1}{2}, \quad Q_3(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$Q_4(1) = \frac{1}{6} - \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{60}, \quad Q_5(1) = \frac{1}{60} - \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{13}{420} < 0$$

ce qui démontre notre affirmation.