

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES EQUATIONS ALGÈBRIQUES DONT LES EQUATIONS DÉRIVÉES ONT TOUTES LEURS RACINES RÉELLES

par

Tiberiu Popoviciu

à Cluj.

Reçu le 15 Décembre 1934..

I.

Démonstration d'une propriété générale.

1. — Dans le présent travail nous ne considérons que des équations algébriques à coefficients réels. Si le coefficient du terme de plus haut degré d'une telle équation est égal à 1, les racines sont des fonctions continues par rapport aux autres coefficients. Il en résulte, en particulier, que si une telle équation a exactement N racines dans le voisinage d'un certain point et si $N-1$ de ces racines sont réelles, la $N^{\text{ème}}$ est aussi, nécessairement, réelle. Nous tiendrons compte encore du fait que si une suite de polynômes de degré N , ayant tous leurs zéros réels, tend vers un polynôme limite, cette limite est de degré $\leq N$ et a tous ses zéros réels. Par le passage à la limite, certaines des racines de l'équation limite peuvent disparaître à l'infini et alors le degré est inférieur à N .

Etant donné un polynôme $P(x)$ de degré n ($n \geq 1$), nous nous proposons de chercher une condition pour l'existence d'un autre polynôme $Q(x)$ tel que la dérivée de l'équation $P(x).Q(x)=0$ ait toutes ses racines réelles. Plus exactement, nous établirons que si un tel polynôme $Q(x)$ existe on peut en trouver un autre tel que la dérivée du produit ait un certain nombre limité, nombre ne dépendant que du degré du polynôme $P(x)$, de racines distinctes.

Dans le cas général le polynome $P(x)$ peut se mettre sous la forme

$$P(x) = (x - \beta_1)^{q_1} (x - \beta_2)^{q_2} \dots (x - \beta_r)^{q_r} P_1(x)$$

où, $q_v \geq 2, v=1, 2, \dots, r$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ sont réels et distincts et $P_1(x)$ est un polynome de degré $n - \sum_{v=1}^r q_v$ dont les zéros réels sont tous distincts

et différents des β_v . Posons $k = n - \sum_{v=1}^r q_v + r$, le nombre k représente alors la somme du nombre des zéros réels distincts et du nombre des zéros complexes du polynome $P(x)$.

Supposons qu'il existe un polynome $Q(x)$ de degré m vérifiant la propriété, donc un polynome

$$Q(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

tel que si $F(x) = P(x) \cdot Q(x)$, l'équation

$$(1) \quad F'(x) = 0$$

ait toutes ses racines réelles.

Nous avons alors

$$F'(x) = C(x - \beta_1)^{q_1-1} (x - \beta_2)^{q_2-1} \dots (x - \beta_r)^{q_r-1} (x - \alpha_1)^{p_1} (x - \alpha_2)^{p_2} \dots (x - \alpha_s)^{p_s}$$

$$\text{où, } p_\mu \geq 1, \mu = 1, 2, \dots, s, \sum_{v=1}^r q_v - r + \sum_{\mu=1}^s p_\mu = n + m - 1,$$

$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s$ et C est une constante.

Nous faisons abstraction des racines β_v et nous envisageons les racines α_μ dans l'ordre croissant de leur grandeur. Nous dirons donc que la première racine est α_1 , la seconde est α_2 si $p_1 > 1$ et α_2 si $p_1 = 1$, la $(p_1 + 1)^{\text{ème}}$ est α_2 et ainsi de suite.

2. — Admettons, pour le moment, que les zéros α_μ sont tous distincts des zéros β_v et supposons que $s \geq k$.

Remplaçons d'abord le polynome $Q(x)$ par un polynome

$$\phi(x) = x^m + \xi_1 x^{m-1} + \dots + \xi_{m-1} x + \xi_m$$

dont les coefficients $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ sont variables.

Posons $\Phi(x) = P(x) \cdot \phi(x)$ et écrivons les conditions

$$(2) \quad \Phi^{(j_\mu)}(\alpha_\mu) = 0$$

$$j_\mu = 1, 2, \dots, p_\mu - 1, \mu = 1, 2, \dots, s \quad (\text{aucun } j_\mu \text{ si } p_\mu = 1)$$

$$j_\mu = p_\mu, \mu = k + 1, k + 2, \dots, s \quad (\text{aucun } s^i \text{ si } s = k).$$

C'est un système de $m-1$ équations linéaires par rapport aux m inconnues $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$.

Considérons les systèmes de m équations qu'on obtient en ajoutant au système (2) successivement les équations, linéaires par rapport aux inconnues ξ_j ,

$$(3) \quad \Phi^{(p_1)}(\alpha_1) = 0, \Phi^{(p_2)}(\alpha_2) = 0, \dots, \Phi^{(p_k)}(\alpha_k) = 0.$$

Aucune des équations (2) et (3) ne se réduit identiquement à zéro, puisqu'autrement $P(x)$ devrait posséder au moins un des zéros α_μ avec un degré de multiplicité au moins égal à 2. Le système total formé par les équations (2) et (3) est compatible puisqu'il est, par construction, vérifié par les valeurs

$$(4) \quad \xi_1 = a_1, \xi_2 = a_2, \dots, \xi_m = a_m.$$

Le système (2) est indéterminé et admet une infinité de solutions.

Je dis encore qu'au moins un des systèmes de m équations formé avec les équations (2) et avec une des équations (3) a son déterminant non nul. En effet, dans le cas contraire, le système total (2) et (3) serait indéterminé et il y aurait une infinité de polynomes $\Phi(x)$ ayant la même dérivée $F'(x)$, ce qui est manifestement impossible.

3. — Supposons que les $s-1$ premières équations (3) donnent avec (2) des systèmes avec un déterminant nul et que

$$(5) \quad \Phi^{(p_\sigma)}(\alpha_\sigma) = 0, \quad (1 \leq \sigma \leq s)$$

soit la première qui avec (2) donne un système de m équations avec un déterminant non nul. Nous pouvons alors, parmi les équations (2) et les $s-1$ premières équations (3), en choisir $m-1$ qui soient linéairement indépendantes et qui donnent avec (5) un système avec un déterminant non nul. Les équations négligées seront des conséquences de ces $m-1$ équations.

Considérons ce dernier système de m équations et substituons à l'équation (5) la suivante

$$(6) \quad \Phi^{(p_\sigma)}(\alpha_\sigma + \epsilon) = 0$$

où, ϵ est un nombre positif. Le déterminant du système ainsi obtenu sera alors différent de zéro tout au moins pour des valeurs suffisamment petites de ϵ . Résolvant ce système on trouve pour les ξ_j des valeurs qui sont des fonctions continues de ϵ pour ϵ assez petit et se réduisent aux valeurs initiales (4) pour $\epsilon = 0$.

Il en résulte qu'on peut déterminer le polynome $\phi(x)$ de manière

que $\Phi'(x) = 0$ ait les racines indiquées, avec leur ordre de multiplicité, par les égalités (2) et en plus k autres racines $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_k$. Ici nous avons $\alpha'_1 = \alpha_1, \alpha'_2 = \alpha_2, \dots, \alpha'_{\sigma-1} = \alpha_{\sigma-1}, \alpha'_\sigma = \alpha_\sigma + \varepsilon$ et $\alpha'_{\sigma+1}, \alpha'_{\sigma+2}, \dots, \alpha'_k$ sont des fonctions continues de ε et se réduisent à $\alpha_{\sigma+1}, \alpha_{\sigma+2}, \dots, \alpha_k$ pour $\varepsilon = 0$. Pour ε suffisamment petit ces racines sont réelles et on a

$$(7) \quad \alpha'_{\sigma+1} < \alpha'_{\sigma+2} < \dots < \alpha'_k.$$

Faisons croître ε à partir de la valeur initiale 0. Deux cas sont alors a priori possibles,

1°. Pour une première valeur $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$ il se produit des coïncidences entre les racines (7). Donnons à ε cette valeur et soit $Q_1(x)$ le polynôme $\phi(x)$ correspondant. Le produit $F_1(x) = P(x) \cdot Q_1(x)$ jouit alors de la propriété que l'équation dérivée $F'_1(x) = 0$ a encore toutes ses racines réelles. Les $p_1 + p_2 + \dots + p_\sigma - 1$ premières racines de cette équation coïncident avec les $p_1 + p_2 + \dots + p_\sigma - 1$ premières racines de l'équation (1) mais sa $(p_1 + p_2 + \dots + p_\sigma)^{\text{ème}}$ racine est plus grande que la $(p_1 + p_2 + \dots + p_\sigma)^{\text{ème}}$ racine de (1).

2°. Il y a une première valeur $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ telle que si $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2$ certains des coefficients ξ_j deviennent infinis. Dans ce cas, en faisant tendre ε vers ε_2 , les inégalités (7) se maintiennent mais certaines des racines $\alpha'_\mu (\mu > \sigma)$ tendent vers l'infini. Par ce passage à la limite on trouve un polynôme $Q^*(x)$ de degré plus petit que m tel que si $F^*(x) = P(x) \cdot Q^*(x)$ l'équation $F'^*(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles.

Remarquons que nous sommes encore dans ce cas si ε_1 n'existe pas, alors ε_2 peut être égal à $+\infty$.

4. — Si pour le polynôme $F_1(x)$ on a encore $s \geq k$ nous répétons sur ce polynôme le procédé employé. Nous devons arriver finalement à la propriété suivante

Si on a $s \geq k$ les trois cas suivants peuvent se présenter :

1°. On tombe sur un polynôme du type $F(x)$ pour lequel $s < k$.

2°. On tombe sur un polynôme du type $F^*(x) = P(x) \cdot Q^*(x)$ où $Q^*(x)$ est de degré $< m$.

3°. On tombe sur un polynôme du type $F_1(x)$ pour lequel la plus petite racine de l'équation dérivée $F'_1(x) = 0$ est plus grande que α_1 .

Le cas 3° veut dire qu'on arrive à $\sigma = 1$. En effet, si aucun des cas 1°, 2°, 3° n'arrive par pour $F_1(x)$ nous répétons le procédé en déduisant de $F_1(x)$ un $F_2(x)$, de $F_2(x)$ un $F_3(x)$, et ainsi de suite. Si nous n'arrivons pas à démontrer la propriété après un nombre fini de telles opérations, nous considérons la suite infinie $F_1(x), F_2(x), \dots, F_\nu(x), \dots$

Faisant $\nu \rightarrow \infty$ nous arrivons à une équation limite $F_\omega(x) = 0$ du même type. Si $F_\omega(x)$ ne vérifie pas la propriété nous recommençons le procédé sur ce polynôme et ainsi de suite transfiniment. Nous formons ainsi un ensemble de polynômes du type $F(x)$ tel qu'aucun ne vérifie la propriété. Il y a un ensemble correspondant formé par les premières racines des équations dérivées, un autre ensemble formé par les secondes racines des équations dérivées, ... etc. Un de ces ensembles est *non borné* (supérieurement) d'après la définition même de l'ensemble des polynômes du type $F(x)$. Or ceci est en contradiction avec l'hypothèse qu'on n'arrive pas au cas 2°.

La propriété est donc démontrée.

5. — A l'aide de ces observations nous pouvons démontrer maintenant la propriété suivante

S'il existe un polynôme $Q(x)$ (de degré m) tel que la dérivée de l'équation $P(x) \cdot Q(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles, il existe certainement un polynôme $R(x)$ (de degré $\leq m$) tel que la dérivée de l'équation $P(x) \cdot R(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles dont au plus $k + r - 1$ distinctes.

Dans le cas 1° la propriété est démontrée.

Dans le cas 3° on continue le procédé. En raisonnant comme plus haut on voit qu'on doit arriver à 1° ou 2°.

Dans le cas 2° on a abaissé le degré du polynôme $Q(x)$ et on combine alors la démonstration avec un raisonnement d'induction complète en remarquant que si $m = 0$ on est toujours dans le cas 1°

$$\text{puisque alors } s \leq \sum_{\mu=1}^s p_\mu = n - \sum_{\nu=1}^r q_\nu + r - 1 = k - 1.$$

La propriété est donc complètement démontrée.

6. — N'oublions pas que nous avons supposé qu'aucune des racines α_μ ne coïncide avec une racine β_ν . Dans le cas contraire, nous modifions les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$. Si par exemple $\alpha_\mu = \beta_\nu$, $F(x)$ est divisible par $(x - \beta_\nu)^{q_\nu + p_\mu}$ donc $Q(x)$ par $(x - \beta_\nu)^{p_\mu}$. Nous écrivons $(x - \beta_\nu)^{p_\mu} P(x)$ au lieu de $P(x)$ et nous prenons pour $Q(x)$ son quotient par $(x - \beta_\nu)^{p_\mu}$. Nous faisons ce changement pour chaque couple α_μ, β_ν coïncidant et chaque fois que cela arrive. Remarquons que les nombres k et r ne changent pas par cette modification. On en déduit que la propriété est tout à fait générale.

Notons encore que, sans préciser la nature des zéros du polynôme $P(x)$, nous pouvons énoncer la propriété suivante,

S'il existe un polynome $Q(x)$ tel que la dérivée de l'équation $P(x).Q(x)=0$ ait toutes ses racines réelles, il existe certainement un polynome $R(x)$ tel que la dérivée de l'équation $P(x).R(x)=0$ ait toutes ses racines réelles dont au plus $n-1$ distinctes.

II.

Etude d'un cas particulier.

7. — Considérons un polynome de la forme

$$F(x) = (x-c)^p [(x-c)^2+d^2] Q(x),$$

$Q(x)$ étant un autre polynome, $c, d \neq 0$ des constantes réelles et p un entier positif.

Nous nous proposons de démontrer que,

L'équation dérivée $F'(x) = 0$ ne peut avoir toutes ses racines réelles.

Remarquons d'abord que la propriété est indépendante des valeurs des constantes c et d puisqu'une transformation réelle et linéaire n'influe pas sur la réalité des racines de la dérivée.

Pour démontrer la propriété supposons le contraire. Il existe alors un polynome $Q(x)$ de degré m

$$Q(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$$

tel que la dérivée du polynome $F(x) = x^p(x^2+1).Q(x)$ soit de la forme

$$F'(x) = Cx^{p-1}(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2} \dots (x-\alpha_s)^{p_s} \quad (C = m+p+2)$$

où, $p_\mu \geq 1$, $\mu = 1, 2, \dots, s$, $p_1 + p_2 + \dots + p_s = m+2$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

α_s sont réels, distincts et différents de zéro. Nous pouvons supposer que α_1 est positif et que les autres α_μ sont tous négatifs ou positifs et plus grands que α_1 . Nous fixons deux de ces racines α_γ et α_δ . Si $p_1 > 1$ nous prenons $\gamma=1, \delta=2$ et si $p_1=1$ nous prenons $\gamma=3, \delta=2$.

8. — Supposons $s > 1$. Introduisons à la place de $Q(x)$ le polynome

$$\phi(x) = x^m + \xi_1 x^{m-1} + \dots + \xi_m$$

à coefficients variables et posons $\Phi(x) = (x-\varepsilon)^p [(x-\varepsilon)^2+1] \phi(x)$, ε étant un nombre positif.

Déterminons le polynome $\phi(x)$ par les conditions

$$(8) \quad \Phi^{(j_\mu)}(\alpha_\mu) = 0, \quad j_\mu = 1, 2, \dots, p_\mu - 1, \mu = \gamma, \delta \quad (\text{aucun si } p_\mu = 1) \\ j_\mu = 1, 2, \dots, p_\mu \text{ pour tous les } \mu \text{ différents de } \gamma \text{ et } \delta,$$

qui est un système linéaire par rapport aux m inconnues $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$.

Désignons par $D(\varepsilon)$ le déterminant de ce système.

9. — Supposons d'abord $D(0)=0$ (1). Le système (8) est indéterminé. Il existe donc deux polynomes distincts $\phi_1(x), \phi_2(x)$ tel que si $\Phi_1(x) = x^p(x^2+1)\phi_1(x)$, $\Phi_2(x) = x^p(x^2+1)\phi_2(x)$, les polynomes $\Phi'_1(x), \Phi'_2(x)$ soient tous les deux divisibles par $\frac{F'(x)}{(x-\alpha_\gamma)(x-\alpha_\delta)}$. Si nous formons

la différence $\Phi_3(x) = x^p(x^2+1) \cdot [\phi_1(x) - \phi_2(x)]$ nous voyons que le polynome $\Phi'_3(x)$ de degré $< m+p+1$ est divisible par le polynome $\frac{F'(x)}{(x-\alpha_\gamma)(x-\alpha_\delta)}$ de degré $m+p-1$. Il en résulte que $\Phi_3(x)$ a tous ses zéros réels.

Le problème est ainsi réduit au cas où le degré m du polynome $Q(x)$ est devenu plus petit.

10. — Supposons maintenant que $D(0) \neq 0$. Alors $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ seront des fonctions continues de ε dans le voisinage de $\varepsilon=0$ et se réduisent respectivement à $a_1, a_2, \dots, a_m$ pour $\varepsilon=0$. L'équation $\Phi'(x)=0$ aura les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ avec l'ordre de multiplicité indiqué par (8) et en outre deux racines $\alpha'_\gamma, \alpha'_\delta$ qui sont continues en ε pour les valeurs suffisamment petites de ε et se réduisent à α_γ et α_δ pour $\varepsilon=0$.

Faisant croître ε à partir de la valeur 0 les cas suivants peuvent se présenter,

1°. $\alpha'_\gamma, \alpha'_\delta$ restent distincts, donc réels, jusqu'à ce que ε coïncide avec α_1 .

2°. Il existe une valeur $0 < \varepsilon_1 < \alpha_1$ tel que pour $\varepsilon = \varepsilon_1$ les racines $\alpha'_\gamma, \alpha'_\delta$ coïncident.

3°. Il existe une valeur $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ tel que pour $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2$ au moins une des racines $\alpha'_\gamma, \alpha'_\delta$ tend vers infini.

Dans le cas 1° en faisant croître ε jusqu'à α_1 on a réduit le problème au cas où p est remplacé par $p+p_1$ et m par $m-p_1$.

(1) Il importe peu ici, comme dans la suite, que ce cas puisse ou non arriver effectivement.

Dans le cas 3° en faisant $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2$ on réduit le problème au cas où, p restant fixe, le degré du polynôme $\phi(x)$ devient $< m$.

Dans le cas 2°, en appliquant une transformation linéaire, on voit qu'il existe un polynôme $F_1(x) = x^p(x^2+1)Q_1(x)$ du même type, $Q_1(x)$ étant encore de degré m mais le plus petit zéro positif de la dérivée $F'_1(x)$ est plus petit que α_1 .

11. — On voit donc que ce procédé de réduction nous conduit aux quatre cas suivants,

1°. On arrive au cas où $s = 1$.

2°. On arrive, p restant fixe, à réduire le degré m du polynôme $Q(x)$.

3°. On arrive à faire croître l'exposant p et à faire diminuer, en même temps, le degré du polynôme $Q(x)$.

4°. On arrive à un polynôme $Q(x)$ où α_1 est devenu plus petit.

Dans le cas 4° nous répétons le procédé et un raisonnement analogue à celui employé dans le No 5 nous montre alors qu'il faut que nous tombions sur 1°, 2°, ou 3°.

Remarquons que l'analyse précédente est en défaut si $s=2$ et $p_1 = 1$.

Finalement, en raisonnant par récurrence, on voit que la propriété sera prouvée si nous faisons la démonstration dans les trois cas suivants

1. $m = 0$, 2. $s = 1$, 3. $s = 2, p_1 = 1$.

12. — Achéons maintenant la démonstration en discutant les trois derniers cas.

Dans le premier cas $F(x) = x^p(x^2+1)$ et l'équation

$$F'(x) = x^{p-1}[(p+2)x^2 + p] = 0$$

a évidemment des racines imaginaires.

Dans le second cas il faut que le système de $m+1$ équations

$$(9) \quad F^{(j)}(\alpha_1) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m+1,$$

linéaires par rapport aux m coefficients $a_1, a_2, \dots, a_m$ soit compatible.

Le déterminant de ce système est le déterminant de WRONSKI, $W(f_1, f_2, \dots, f_{m+1})$ relatif aux fonctions

$$f_{j+1} = [x^{p+j}(x^2+1)]', \quad j=0, 1, 2, \dots, m,$$

calculées pour $x = \alpha_1$.

Posons

$$g_1 = \frac{1}{x^p(x^2+1)} \quad \text{et} \quad g_{j+2} = x^j, \quad j=0, 1, 2, \dots, m$$

alors

$$f_{j+1} = \left(\frac{g_{j+2}}{g_1} \right)', \quad j=0, 1, 2, \dots, m.$$

On connaît la relation (2)

$$\frac{1}{g_1^{m+2}} W(g_1, g_2, \dots, g_{m+2}) = W \left[\left(\frac{g_2}{g_1} \right)', \left(\frac{g_3}{g_1} \right)', \dots, \left(\frac{g_{m+2}}{g_1} \right)' \right]$$

Le second membre étant précisément le déterminant du système (9).

Nous trouvons facilement que $W(g_1, g_2, \dots, g_{m+2})$, à un facteur numérique près, est égal à

$$D_{p,m+1} = \left[\frac{1}{x^p(x^2+1)} \right]^{(m+1)}$$

Supposons d'abord $p = 1$. Si nous posons $x = \cotg \theta$ nous déduisons par un calcul simple

$$D_{1,k} = (-1)^k k! (tg \theta)^{k+1} [1 - \cos^{k+1} \theta \cos(k+1) \theta].$$

On voit donc que

$$(-1)^k D_{1,k} > 0, \quad \text{pour } x > 0$$

$$-D_{1,k} > 0, \quad \text{pour } x < 0.$$

Remarquons maintenant que

$$D_{p,k} = \left[\frac{1}{x^{p-1}} \frac{1}{x(x^2+1)} \right]^{(k)} = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} \left(\frac{1}{x^{p-1}} \right)^{(v)} D_{1,k-v}$$

donc

$$(-1)^k D_{p,k} > 0, \quad \text{pour } x > 0$$

$$(-1)^p D_{p,k} > 0, \quad \text{pour } x < 0.$$

Le déterminant du système (9) ne peut donc être nul ce qui est en contradiction avec la compatibilité du système.

Dans le troisième cas les conclusions sont les mêmes sauf qu'au lieu de la racine α_1 nous prenons α_2 dans la formation du système (9).

La propriété est donc complètement démontrée.

(2) Voir PÓLYA u. SZEGŐ „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis“ t. II, p. 113.

III.

Sur la distribution des racines des équations algébriques dont l'équation dérivée a toutes ses racines réelles.

13. — Considérons un polynôme $f(x)$ divisible par (x^2+1) et tel que $f'(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles. De l'étude précédente résulte alors que l'équation $f(x) = 0$ ne peut avoir de racines réelles trop rapprochées de l'origine.

Supposons que

$$(10) \quad f(x) = (x - c)(x^2 + 1) \cdot g(x)$$

où c est positif, $g(x)$ un polynôme de degré m et $f'(x) = 0$ a toutes ses racines réelles. La racine c a alors un minimum positif que nous proposons de déterminer. Ce minimum, on peut l'établir facilement, est nécessairement atteint pour au moins un polynôme $g(x)$ de degré $< m$.

D'après la propriété générale, démontrée dans le § I(3), il suffit d'examiner le cas où

$$(11) \quad f'(x) = C \cdot (x - \alpha)^p (x - \beta)^q$$

α, β réels et $p + q = m + 2$.

Nous écrivons encore $\Phi(x) = (x - c + \varepsilon)(x^2 + 1)\phi(x)$ avec $\varepsilon > 0$, $\phi(x) = x^m + \xi_1 x^{m-1} + \dots + \xi_m$ et nous posons les conditions

$$\Phi^{(v)}(\alpha) = 0, \quad v = 1, 2, 3, \dots, p-1$$

$$\Phi^{(\mu)}(\beta) = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, q-1.$$

Ce système nous montre, exactement comme plus haut, que si $\alpha \neq \beta$ ou bien on peut diminuer la racine c , ou bien il existe un polynôme $\Phi(x)$ avec $\varepsilon = 0$ et $\phi(x)$ de degré $< m$ tel que $\Phi'(x) = 0$ ait encore toutes ses racines réelles.

Un raisonnement par récurrence nous montre donc que le minimum de la racine c sera déterminé par les polynômes de la forme (10), (11) pour lesquels $\alpha = \beta$.

14. — Ces polynômes sont de la forme

$$(12) \quad f(x) = (x - \alpha)^n + A$$

α, A étant deux constantes réelles. Il faut écrire que $f(x)$ est divisible

(3) On peut éviter l'emploi de cette propriété. Nous en tenons compte uniquement pour simplifier l'exposé.

par (x^2+1) . En posant $\alpha = \cotg \theta$ on trouve

$$\sin n\theta = 0, \quad A = -\frac{(-1)^n \cos n\theta}{(\sin \theta)^n}$$

d'où les $n-1$ solutions

$$\alpha = \cotg \frac{v\pi}{n}, \quad A = -\frac{(-1)^{n+v}}{\left(\sin \frac{v\pi}{n}\right)^n} \quad v = 1, 2, \dots, n-1.$$

Il faut maintenant distinguer deux cas.

Si n est pair l'équation $f(x) = 0$ n'a des racines réelles que si v est pair aussi et les racines sont alors

$$\cotg \frac{v\pi}{2n}, \quad -\tg \frac{v\pi}{2n}, \quad v = 2, 4, \dots, n-2.$$

La plus petite racine positive est $\cotg \frac{(n-2)\pi}{2n} = \tg \frac{\pi}{n}$ et la plus grande racine négative, comme il était à prévoir par raison de symétrie, est égale à $-\tg \frac{\pi}{n}$.

Si n est impair l'équation $f(x) = 0$ a toujours une racine réelle qui est

$$\cotg \frac{v\pi}{2n} \quad \text{pour } v \text{ impair,} \quad -\tg \frac{v\pi}{2n} \quad \text{pour } v \text{ pair.}$$

La plus petite racine positive est encore $\tg \frac{\pi}{n}$ et la plus grande racine négative $-\tg \frac{\pi}{n}$.

Finalement donc, en tenant compte aussi d'une transformation linéaire, nous arrivons au théorème suivant

Si l'équation dérivée $f'(x) = 0$ d'une équation algébrique de degré n a toutes ses racines réelles et si l'équation $f(x) = 0$ a un couple de racines imaginaires conjuguées $\pm ib$, cette équation ne peut avoir aucune racine réelle dans l'intervalle

$$\left(a - b \tg \frac{\pi}{n}, \quad a + b \tg \frac{\pi}{n}\right).$$

Les limites ne sont atteintes respectivement que pour les équations

$$f(x) \equiv C \cdot \left[\left(x - a \pm b \cotg \frac{2\pi}{n}\right)^n - \frac{(\pm b)^n}{\left(\sin \frac{2\pi}{n}\right)^n} \right] = 0$$

C étant une constante.

15. -- Nous allons restreindre maintenant le problème en imposant au polynôme $g(x)$ de la formule (10) la condition d'avoir lui aussi tous ses zéros réels.

Considérons donc le polynôme

$$(13) \quad f(x) = (x^2+1)(x-c)(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2} \dots (x-\alpha_s)^{p_s}$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_s + 3 = n$$

où, $p_1, p_2, \dots, p_s \geq 1$, $c > 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ sont réels, distincts et tous négatifs et plus grands que c . Enfin l'équation dérivée $f'(x) = 0$ a toutes ses racines réelles.

La racine c a encore un minimum qui est évidemment atteint et qui (sauf pour $n=3$ ou 4) est plus grand que le minimum obtenu dans le problème plus général, puisque les polynômes (12) ne peuvent avoir plus de deux zéros réels. L'existence d'au moins un polynôme de la forme (13) resultera d'ailleurs, comme dans le problème précédent, de la construction même du polynôme donnant ce minimum.

Nous allons chercher à déterminer ce minimum.

L'équation dérivée $f'(x) = 0$ a d'abord $n-s-3$ racines communes avec $f(x) = 0$ et en plus $s+2$ racines distinctes de c et des α_p . De ces dernières s sont certainement distinctes et séparées par c et les α_p . Ces $s+2$ racines peuvent donc présenter les configurations suivantes

1°. Toutes sont distinctes.

2°. Une est une racine double.

3°. Deux sont des racines doubles.

4°. Une est une racine triple.

Dans le cas 1° le polynôme (13) ne donne évidemment pas le minimum puisqu'on peut diminuer un peu la valeur de c de manière que, par suite de la continuité, la réalité de zéros de l'équation dérivée ne souffre pas de changement.

Il en est de même dans le cas 3° puisqu'aucun couple de racines doubles ne peut devenir un couple de racines imaginaires conjuguées, en vertu du théorème de ROLLE (4).

Dans le cas 2° soit β la racine double et posons

$$f(x) = (x-\alpha_1)h(x).$$

Nous avons

$$(14) \quad [h(x)x]'_{x=\beta} - \alpha_1[h(x)]'_{x=\beta} = 0.$$

(4) Dans ce cas, les $s+2$ racines en question se réduisent à s racines distinctes qui sont séparées par les racines de l'équation $f(x) = 0$.

Le coefficient de α_1 n'est pas nul puisqu'autrement l'autre terme devrait aussi être nul, donc $h(\beta) = 0$, ce qui est impossible car nous savons que $f(\beta) \neq 0$.

On peut donc diminuer c et déterminer la valeur correspondante α'_1 de α_1 par l'équation (14) de manière que si $f_1(x) = h(x)(x-\alpha'_1)$, ce polynôme soit encore de la forme (13).

Il en résulte que le minimum de la racine c ne peut être atteint que si $f'(x) = 0$ a, en dehors des zéros communs avec $f(x) = 0$, une racine triple.

16. -- Supposons donc que l'équation dérivée ait une racine triple, distincte des racines de l'équation primitive et supposons aussi que $s \geq 2$. Posons

$$f(x) = h(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2), \quad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 + Ax + B$$

et désignons par β la racine triple en question.

Le système en A et B

$$(15) \quad \begin{aligned} [h(x)x^2]'_{x=\beta} + A[h(x)x]'_{x=\beta} + B[h(x)]'_{x=\beta} &= 0 \\ [h(x)x^2]''_{x=\beta} + A[h(x)x]''_{x=\beta} + B[h(x)]''_{x=\beta} &= 0 \end{aligned}$$

est alors compatible par construction. Si son déterminant est $\neq 0$, on le voit immédiatement, on peut diminuer la valeur de c .

Si le déterminant de ce système est nul la seconde équation est une conséquence de la première. Il existe donc une infinité de valeurs A_1, B_1 voisines de A, B vérifiant le système (15). Prenons un système de telles valeurs A_1, B_1 et posons

$$f_1(x) = h(x)(x^2 + A_1x + C_1)$$

On voit que le polynôme

$$f_1(x) - f(x) = h(x)[(A_1-A)x + (B_1-B)]$$

est de la forme (13), est de degré $n-1$ ou $n-2$ et sa dérivée a tous ses zéros réels. Le zéro β est en effet au moins double et ce zéro ne peut appartenir au polynôme primitif puisque $h'(\beta) \neq 0$.

En complétant donc la démonstration par un raisonnement par récurrence on voit que le minimum de c ne peut être atteint par un polynôme de la forme (13) pour lequel $s > 1$.

Remarquons que la démonstration précédente exclut le cas $s=0$, donc le cas où

$$f(x) = (x^2+1)(x-c)^{n-2}.$$

Dans ce cas la dérivée n'a que deux zéros différents de c et il est clair que le minimum ne peut avoir lieu que si ces deux racines coïncident. Ce cas d'ailleurs est compris dans le cas 1^o du No. précédent.

Finalement donc, le minimum de la racine c ne peut être donné que par les polynômes de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+1)(x-c)(x-d)^q & q &\leq n-3 \\ f(x) &= (x^2+1)(x-c)^r & r &\leq n-2 \end{aligned}$$

dont la dérivée a un zéro triple différent de c et d ou, pour le second, un zéro double différent de c .

17. — Prenons d'abord le polynôme

$$f(x) = (x^2+1)(x-c)^r.$$

Nous avons

$$f'(x) = (x-c)^{r-1}[(r+2)x^2 - 2cx + r].$$

Les deux zéros de la dérivée sont égales si $c = \sqrt{r(r+2)}$. Nous trouvons ainsi pour c un minimum relatif égal à $\sqrt{3}$.

Examinons maintenant le cas

$$f(x) = (x^2+1)(x-c)(x-d)^q.$$

Nous avons

$$f'(x) = (x-d)^{q-1} \cdot E(x)$$

$$E(x) = (q+3)x^3 - [3d + (q+2)c]x^2 + (q+1+2cd)x - (d+qc).$$

Il faut donc déterminer c et d de manière que l'équation $E(x)=0$ ait toutes ses racines confondues. Désignant par e cette racine on doit avoir

$$3d + (q+2)c = 3(q+3)e$$

$$q+1+2cd = 3(q+3)e^2$$

$$d+qc = (q+3)e^3.$$

Eliminant d et e entre ces équations on trouve, en faisant les calculs, que c vérifie l'équation

$$(16) \quad 2(q+2)^3 c^2(c^2+9)^2 - 27(q+1)(q+4)^2(c^2+1)^2 = 0$$

L'élimination de e nous donne en effet

$$9d^2 - 6cd + (q+2)c^2 - 3(q+3)(q+1) = 0$$

$$3cd^2 + [(q+2)c^2 - 3(q+4)]d - (4q^2 + 12q - 1)c = 0$$

d'où, en éliminant d , nous obtenons la relation (16).

c étant supposé positif, l'équation (16) peut s'écrire

$$(q+2)\sqrt{2(q+2)c(c^2+9)} - 3(q+4)\sqrt{3(q+1)(c^2+1)} = 0.$$

On vérifie immédiatement que cette équation, du troisième degré en c , a une seule racine réelle et positive. Cette racine décroît lorsque q croît. Il suffit en effet de remarquer que la fonction

$$\frac{(x+1)^2}{x(x+9)^2} \quad x > 0$$

est décroissante et que le rapport

$$\frac{(q+2)^3}{(q+1)(q+4)^2} \quad q > 0$$

croît avec q .

Il en résulte donc que le minimum de la racine c , pour les équations de degré n , est égal à la racine positive de l'équation du troisième degré

$$(n-1)\sqrt{2(n-1)x(x^2+9)} - 3(n+1)\sqrt{3(n-2)(x^2+1)} = 0.$$

Ce minimum décroît lorsque n croît et tend, pour $n \rightarrow \infty$, vers la racine positive de l'équation

$$\sqrt{2}x(x^2+9) - 3\sqrt{3}(x^2+1) = 0.$$

18. — Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants

Si l'équation dérivée $f'(x) = 0$ d'une équation algébrique de degré n a toutes ses racines réelles et si l'équation $f(x) = 0$ a un seul couple de racines imaginaires conjuguées $a \pm ib$, cette équation ne peut avoir aucune racine dans l'intervalle

$$(a - \lambda_n b, a + \lambda_n b)$$

où λ_n est la racine réelle et positive de l'équation

$$(n-1)\sqrt{2(n-1)x(x^2+9)} - 3(n+1)\sqrt{3(n-2)(x^2+1)} = 0.$$

Les limites ne sont atteintes que pour les équations

$$[(x-a)^2 + b^2](x \pm \lambda_n)(x \pm \mu_n)^{n-3} = 0, \text{ (les signes se correspondent)}$$

où

$$\mu_n = -\lambda_n \frac{(n-1)^2 \lambda_n^2 + 3(3n^2 - 10n - 1)}{3(n+1)(3 - \lambda_n^2)}.$$

Si l'équation dérivée $f'(x) = 0$ d'une équation algébrique a toutes ses racines réelles et si l'équation $f(x) = 0$ a un seul couple de

racines imaginaires conjuguées $a \pm ib$ cette équation ne peut avoir aucune racine dans l'intervalle

$$(a - \lambda b, a + \lambda b)$$

où λ est la racine réelle et positive de l'équation

$$\sqrt{2}x(x^2+9) - 3\sqrt{3}(x^2+1) = 0.$$

Les limites ne sont jamais atteintes, mais λ ne peut être remplacé par aucun autre nombre plus grand.

Ce nombre λ est voisin de 0,5. Plus exactement, il est compris entre 0,4946 et 0,4947.

19. — On peut encore chercher, dans ce dernier problème, le minimum d'une racine d'ordre donné p de multiplicité. On trouve encore, par un raisonnement analogue, que ce minimum est donné par le polynôme

$$f(x) = (x^2+1)(x-c)^p(x-d)^{n-p-2}$$

déterminé de manière que l'équation dérivée $f'(x) = 0$ ait une racine triple différent de c et d .

En désignant encore par e cette racine triple on doit avoir

$$\begin{aligned} (p+2)d + (n-p)c &= 3ne \\ (17) \quad n-2+2cd &= 3ne^2 \\ pd + (n-p-2)c &= ne^3. \end{aligned}$$

Eliminant d et e on trouve une équation du troisième degré en c^2 donnant le minimum de cette racine c . Si on fait les calculs on trouve encore que ce minimum décroît lorsque n croît et tend, pour $n \rightarrow \infty$, vers une certaine limite $\lambda^{(p)}$. On peut déterminer ce nombre $\lambda^{(p)}$ de la manière suivante: Dans les équations (17) on remplace d par nd , on divise ces équations par n et on fait ensuite $n \rightarrow \infty$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} (p+2)d + c &= 3e \\ 1 + 2cd &= 3e^2 \\ pd + c &= e^3. \end{aligned}$$

Eliminant d et e on trouve que $\lambda^{(p)}$ est la racine positive de l'équation

$$2x^6 + 3(5p-2)x^4 + 6(4p^2+13p+1)x^2 - (p+2)(4p-1)^2 = 0.$$

Cette racine est toujours comprise entre $\sqrt{\frac{p}{2} - \frac{1}{3}}$ et $\sqrt{\frac{p}{2} - \frac{1}{4}}$.

On peut même montrer que, si $p > 5$, $\lambda^{(p)}$ est compris entre $\sqrt{\frac{p}{2} - \frac{1}{3}}$ et $\sqrt{\frac{p}{2} - \frac{5}{16}}$. Nous avons donc, dans ce cas, la valeur de $\lambda^{(p)}$ avec une erreur plus petite que

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{16}}{2\sqrt{\frac{p}{2} - \frac{1}{3}}} \leq \frac{1}{96\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{3}}} < \frac{1}{100}.$$