SUR CERTAINES EQUATIONS FONCTIONNELLES DÉFINISSANT DES POLYNOMES.

Par

Tiberiu Popoviciu

à Cluj.

Reçu le 20 Juillet 1934.

I.

Equations fonctionnelles à une variable.

1. — Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle fermé (a, b), $a < b$, et vérifiant l'équation fonctionnelle linéaire

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(x+ih) = 0 \tag{1}$$

pour tout x et pour tout $h > 0$ tels que $a \leq x$, $x+nh \leq b$, les a_i étant des constantes.

A l'équation fonctionnelle (1) nous attachons l'équation caractéristique

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0.$$

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que le polynome $F(z)$ ne soit pas rationnel par rapport à une puissance entière et positive de z.

Nous pouvons supposer $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$. On peut exprimer ces conditions en disant que l'équation (1) est de *degré n*. On voit facilement, en ajoutant convenablement des relations de la forme (1), que si une fonction $f(x)$ vérifie une équation fonctionnelle de degré n, elle vérifie également une équation de degré $n+m$, quel que soit l'entier positif m.

Nous dirons aussi que l'équation (1) *est d'ordre k* lorsque 1 est une racine d'ordre k de multiplicité de l'équation caractéristique.

Si $f(x)$ vérifie une équation de degré n et d'ordre k elle vérifie également une équation de degré $n+m$ et d'ordre au moins égal à k, quel que soit l'entier positif m.

2. — Pour que l'équation (1) soit d'ordre k il faut et il suffit que

$$F(1) = F'(1) = \dots = F^{(k-1)}(1) = 0, \qquad F^{(k)}(1) \neq 0.$$

La fonction x^m est une solution de l'équation (1) si $m = 0, 1, \dots k-1$, mais n'en est pas une pour $m \geq k$ puisque

$$\sum_{i=0}^{n} a_i i^k = \left[\left(z\frac{d}{dz}\right)^{(k)} F(z)\right]_{z=1} = F^{(k)}(1) \neq 0$$

donc

L'équation fonctionnelle (1) est vérifiée par un polynome quelconque de degré $k-1$, mais n'en est pas par un polynome dont le degré effectif dépasse $k-1$.

3 — Considérons le polynome $G_p(z)$ qui s'obtient par la formule

$$G_p(z^p) = F(z) \,.\, F(\alpha z) \dots F(\alpha^{p-1} z)$$

où α est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Supposons que le polynome $F(z)$ vérifie l'identité

$$G_2(z) \equiv a_0 \,.\, F(z), \quad \text{ou} \quad F(z) \,.\, F(-z) \equiv a_0 \,.\, F(z^2). \tag{2}$$

On a alors $F(z) = a_0(1-z)^k \prod_{i=1}^{n-k} (1-\rho_i z)$, où ρ_i sont des racines, différentes de 1, de l'unité. Si ρ_1 est racine d'ordre p de l'unité on voit immédiatement que $G_p(z)$ ne peut être identique à $a_0^{p-1} . F(z)$.

Il en résulte qu'*on peut toujours déterminer un nombre p de manière qu'on ait*

$$G_p(z) \not\equiv a_0^{p-1} . F(z) \tag{3}$$

sauf dans le cas où $F(z) = a_0(1-z)^n$.

La forme générale des polynomes $F(z)$ vérifiant (2), ou la relation plus générale $G_p(z) = a_0^{p-1} . F(z)$, peut s'obtenir facilement, mais nous n'en avons pas besoin dans la suite.

4. — Revenons à l'équation (1) et supposons que l'ordre k soit plus petit que n. La fonction $f(x)$ vérifie aussi l'équation fonctionnelle dont l'équation caractéristique est $G_p(z) = 0$, le nombre p étant déterminé de manière qu'on ait la relation (3). La fonction vérifie également l'équation fonctionnelle dont l'équation caractéristique est $G_p(z)+\lambda F(z)=0$, λ étant une constante.

On peut déterminer la constante λ $[G_p^{(k)}(1)+\lambda F^{(k)}(1)=0]$ de manière que cette dernière équation fonctionnelle soit d'ordre au moins égal à $k+1$. Nous en déduisons donc que

Si la fonction $f(x)$ vérifie l'équation (1) de degré n et d'ordre k elle vérifie également une équation de degré n et d'ordre au moins égal à $k+1$.

La propriété relative au degré résulte de la remarque faite à la fin du Nr. 1.

5. — Il en résulte que si la fonction $f(x)$ vérifie l'équation (1) elle vérifie également une équation fonctionnelle *d'ordre n* et *de degré n.*

Une équation (1) de degré et d'ordre n est de la forme

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(x+ih)=0$$

et nous savons que, si $f(x)$ est supposée continue, la solution générale de cette équation est un polynome arbitraire de degré $n-1$(1).

Nous en déduisons donc la propriété finale suivante:

La solution continue générale de l'équation (1) d'ordre k est un polynome arbitraire de degré $k-1$.

II.

Equations fonctionnelles à deux variables.

6. — Considérons maintenant une fonction $f(x,y)$ de deux variables x et y, définie dans le rectangle $a\leq x\leq b$, $c\leq y\leq d$ et vérifiant l'équation fonctionnelle linéaire

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}f(x+ih,\ y+jh')=0 \tag{4}$$

pour tout x, y et pour tout $h>0$, $h'>0$ tels que $a\leq x$, $x+nh\leq b$, $c\leq y$, $y+mh'\leq d$, les $a_{i,j}$ étant des constantes.

(1) On peut soumettre la fonction à des conditions plus générales que la continuité. Voir dans ma Thèse (*Mathematica* t. VIII sp. p. 57) la généralisation d'un théorème de M. W. SIERPINSKI.

A cette équation nous attachons l'équation caractéristique

$$F(z,t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}z^it^j=\sum_{j=0}^{m}t^jf_j(z)=0$$

$$F_j(z)=\sum_{=0}^{n}a_{i,j}z^i\,.$$

Définissons d'abord le degré et l'ordre de l'équation fonctionnelle (4). Nous dirons que l'équation (4) est *de degré (n,m)* si l'on a

$$\sum_{i=0}^{n}|a_{i,0}|\neq0,\quad\sum_{i=0}^{n}|a_{i,m}|\neq0,\quad\sum_{j=0}^{m}|a_{0,j}|\neq0,\quad\sum_{j=0}^{m}|a_{n,j}|\neq0.$$

Nous dirons que l'équation (4) est *d'ordre (k,k')* si l'équation $F(z,t)=0$ admet la racine $z=1$ d'ordre k de multiplicité, identiquement en t et la racine $t=1$ d'ordre k' de multiplicité, identiquement en z. Le nombre k est donc tel qu'on ait

$$F(1,t)=F'_z(1,t)=\ .\ .\ .\ .\ .\ .=F_{z^{k-1}}^{(k-1)}(1,t)=0$$

identiquement en t et

$$F_{z^k}^{(k)}(1,t)\neq0$$

pour au moins une valeur de t. En d'autres termes k est le nombre de fois que les polynomes $F_j(z)$ contiennent en commun le facteur $(1-z)$.

Si $f(x,y)$ vérifie l'équation (4) de degré (n,m) et d'ordre (k,k') elle vérifie aussi une équation de degré $(n+n_1,\ m+m_1)$ et d'ordre au moins égal à (k,k') (2), quels que soient les entiers positifs ou nuls n_1 et m_1.

7. — Si la fonction $f(x,y)$ vérifie l'équation (4) d'ordre (k,k') elle vérifie aussi l'équation fonctionnelle dont l'équation caractéristique est $G_p(z,t)=0$ où

$$G_p(z^p,t)=F(z,t)\,.\,F(\alpha z,t)\ldots F(\alpha^{p-1}z,t)$$

α étant encore une racine primitive d'ordre p de l'unité.

La fonction vérifiera également l'équation fonctionnelle dont l'équation caractéristique est $G_p(z,t)+H(t)F(z,t)=0$, $H(t)$ étant un polynome en t.

On peut choisir le nombre p de manière que

$$G'_p(z,t)\not\equiv\left(\sum_{j=1}^{m}a_{0,j}t^j\right)^{p-1}F(z,t)$$

(2) L'ordre (k_1,k'_1) est au moins égal à l'ordre (k,k') si $k_1\geq k$, $k'_1\geq k'$.

et alors on peut déterminer le polynome $H(t)$ tel que la nouvelle équation fonctionnelle obtenue soit d'ordre au moins égal à $(k+1, k')$. Le degré de cette équation est de la forme (n', m') où $n' \leq n$.

Nous en déduisons donc la propriété suivante:

Si la fonction $f(x,y)$ vérifie l'équation (4) de degré (n,m) et d'ordre (k, k') elle vérifie également une équation de degré (n, m') et d'ordre au moins égal à $(k+1, k')$.

8. — Nous en déduisons que $f(x,y)$ vérifie une équation de degré (n, m') et d'ordre au moins égal à (n, k').

Examinons maintenant les équations de cette dernière forme. Dans ce cas le polynome $F(z, t)$ est égal à $(1-z)^n Q(t)$ où $Q(t)$ est un polynome de t seul. Si nous procédons comme au Nr. précédent, mais en prenant cette fois

$$G_p(z, t) = (1-z)^n . Q(t) . Q(\alpha t) \dots Q(\alpha^{p-1} t);$$

nous arrivons à la propriété:

Si la fonction $f(x, y)$ vérifie l'équation (4) de degré (n, m) elle vérifie aussi une équation de degré (n, m') et d'ordre (n, m').

On montre exactement de la même manière que *$f(x, y)$ vérifie une équation de degré (n', m) et d'ordre (n', m).*

Nous n'avons d'ailleurs pas besoin de préciser les nombres n' et m'.

9. — Une équation (4) de degré (n, m) et d'ordre (n, m) est de la forme

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{m}{j} f(x+ih,\ y+jh') = 0$$

et nous savons que la solution continue générale de cette équation est un *pseudo-polynome* d'ordre $(n-1, m-1)$, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i A_i(y) + \sum_{j=0}^{m-1} y^j B_j(x) \text{ (3)},$$

les $A_i(y)$ étant des fonctions continues de y et les $B_j(x)$ des fonctions continues de x seul.

Il en résulte que *la solution continue générale de l'équation fonctionnelle (4) est un pseudo-polynome.*

(3) Voir: A. Marchaud „Sur les dérivées et les différences des fonctions de variables réelles". Voir aussi ma Thèse (*Mathematica* t. VIII) p. 65.

10. — Pour que $x^r y^s$ soit une solution de l'équation (4) il faut que

$$\left[\frac{\partial^{\beta+\gamma} F(z, t)}{\partial z^\beta \, \partial t^\gamma}\right]_{z=t=1} = 0, \qquad \beta \leq r, \quad \gamma \leq s.$$

Si (k, k') est l'ordre de l'équation on voit immédiatement que $x^k y^m$ et $x^n y^{k'}$ ne peuvent être des solutions.

Si on cherche la condition pour que $x^r A(y)$ soit une solution on trouve que la fonction $A(y)$ doit vérifier les équations

$$\sum_{j=0}^{m} \left[\left(z \frac{d}{dz}\right)^{(\beta)} F_j(z)\right]_{z=1} A(y+jh') = 0$$
$$\beta = 0, 1, 2, \dots, r.$$

Si $r \geq k$ $A(y)$ est nécessairement un polynome de degré au plus égal à $m-1$ (ou bien elle est identiquement nulle) et si $r \geq n$ $A(y)$ est un polynome de degré au plus égal à $k'-1$. Lorsque $r=0, 1, 2, \dots k-1$ la fonction $A(y)$ peut être arbitraire. Les solutions de la forme $y^s B(x)$ jouissent des propriétés analogues. Donc,

La solution continue générale de l'équation fonctionnelle (4) d'ordre (k, k') est la somme d'un pseudo-polynome d'ordre $(k-1, k'-1)$ et d'un certain polynome de degré au plus égal à $(n-1, m-1)$ (4).

Il en résulte facilement de ce qui précède que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (4) n'admette comme solutions continues que des polynomes est que cette équation soit d'ordre $(0,0)$.*

11. — Déterminons en particulier les équations de degré (n, m) dont la solution générale continue est un polynome arbitraire de degré $(n-1, m-1)$.

On trouve immédiatement que ces équations ont pour équation caractéristique

$$F(z, t) = (1-t)^m F(z) + (1-z)^n G(t) = 0$$

où $F(z)$ est un polynome de degré n en z et $G(t)$ un polynome de degré m en t. Ces deux polynomes doivent vérifier les inégalités

$$F^{(i)}(1) \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad G^{(j)}(1) \neq 0, \ j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$
$$(-1)^m m!\, F^{(n)}(1) + (-1)^n n!\, G^{(m)}(1) \neq 0.$$

(4) Nous disons qu'un polynome est de degré (n, m) s'il est de degré n en x et de degré m en y. Un polynome est de degré au plus égal à (n, m) s'il est de degré $\leq n$ en x et de degré $\leq m$ en y.

Les inégalités $F(1) \neq 0$, $G(1) \neq 0$ expriment justement que l'équation est d'ordre (0, 0).

La plus simples de ces équations est celle qui a l'équation caractéristique

$$F(z,\, t) = \frac{1}{2}\{(1-t)^m(1+z)^n + (1-z)^n(1+t)^m\} = 0.$$

Il en résulte donc que *la solution continue générale de l'équation fonctionnelle*

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\{(-1)^i+(-1)^j\}\binom{n}{i}\binom{m}{j}f(x+ih,\, y+jh')=0$$

est un polynome quelconque de degré $(n-1,\ m-1)$.

En particulier, la solution générale de l'équation

$$f(x,y)+f(x+2h,y)+f(x,y+2h')+f(x+2h,y+2h')=4f(x+h,\,y+h')$$

est

$$a+bx+cy+dxy$$

a, b, c, d étant des constantes.

On voit aussi que la solution continue générale de l'équation

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2i}f(x+2ih,\, y) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{m}{2j+1}f[x+(2j+1)h,\, y+h']$$

est un polynome arbitraire de degré $n-1$ par rapport à x seul. Ce résultat peut d'ailleurs s'obtenir très simplement aussi d'une manière directe.

11 bis. — Nous pouvons trouver en général les équations (4) dont la solution continue est une fonction de x seul. On voit qu'une telle équation doit être d'ordre (1, 0) au plus et ne pas admettre des solutions de la forme $x^r y$.

12. Cherchons encore les équations (4) dont la solution générale est un polynome de degré $n-1$ en x et y. Il n'y a interêt à chercher que des équations symétriques c'est-à-dire des équations dont l'équation caractéristique présente une certaine symétrie par rapport à z et t. On vérifie facilement que le plus petit degré admissible est $(n,\, n)$. L'équation caractéristique est alors de la forme

$$F(z,\, t) = \sum_{i=0}^{n}(1-t)^i(1-z)^{n-i}\,Q_i(z) = 0$$

où $Q_i(z)$ est un polynome de degré i en z. Ces polynomes doivent vérifier les inégalités

$$Q_i(1) \neq 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots n$$

et les conditions de symétrie. $Q_n(1) \neq 0$ exprime justement que l'équation (4) est d'ordre (0, 0).

En particularisant, on obtient diverses équations de la forme (4) dont la solution continue générale est un polynome arbitraire de degré $n-1$. Ainsi par exemple

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f[x+ih,\, y+(n-i)h']=0$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i 2^{n-i}\binom{n}{i}\left\{\sum_{j=0}^{i}\binom{j}{i}f[x+jh,\, y+(i-j)h']\right\}=0$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{i+j}\left\{\sum_{r=0}^{n-i-j}\binom{n-j-r}{i}\binom{j+r}{j}\right\}f(x+ih,\, y+jh')=0$$

qui correspondent aux cas

$$F(z,\, t) = (t-z)^n$$

$$F(z,\, t) = [2-(t+z)]^n$$

$$F(z,\, t) = \sum_{i=0}^{n}(1-t)^i(1-z)^{n-i}.$$

Pour $n=2$ on trouve que la solution continue générale des équations

$$f(x,y+2h')+f(x+2h,y)=2f(x+h,\,y+h')$$

$$f(x,y+2h')+2f(x+h,y+h')+f(x+2h,y)= \\ =4[f(x+h,y)+f(x,y+h')-f(x,y)]$$

$$f(x,z+2h')+f(x+h,y+h')+f(x+2h,y)= \\ =3[f(x+h,y)+f(x,y+h')-f(x,y)]$$

est $a+bx+cy$ où a, b, c sont des constantes.

Parmi toutes ces équations il parrait que celle qui est la plus simple correspond au cas $F(z,t)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(1-t)^i(1-z)^{n-i}$. Pour $n=2, 3$ on obtient ainsi les équations

$$f(x,y+2h')+f(x,y)+f(x+2h,y)=$$
$$=f(x+h,y)+f(x+h,y+h')+f(x,y+h')$$
$$2f(x+h,y)+f(x+3h,y)+2f(x,y+2h')+f(x+h,y+2h')=$$
$$=2f(x,y+h')+f(x,y+3h')+2f(x+2h,y)+f(x+2h,y+h').$$

III.

Sur un problème de M. D. Pompéiu.

13. — M. D. Pompéiu s'est proposé de trouver les fonctions continues $f(x)$ définies dans (a, b) et vérifiant l'égalité (5).

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt=f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

pour tout x et y compris dans (a, b). La solution en est un polynome du premier degré.

Nous nous proposons de généraliser ce problème.

Considérons une suite croissante de nombres donnés $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$ compris entre 0 et 1 et formons le polynome de Lagrange

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\ldots(t-t_n)}{(t_i-t_0)(t_i-t_1)\ldots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\ldots(t_i-t_n)}f(t_i)$$

en prenant $t_i=x+\lambda_i(y-x)$.

Ecrivons l'égalité entre les valeurs moyennes

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt=\frac{1}{y-x}\int_x^y P(t)\,dt$$

ou bien, après une transformation simples,

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt=\sum_{i=0}^{n}\mu_i f[x+\lambda_i(y-x)] \tag{5}$$

(5) D. Pompéiu: „Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne" C. R. t. 190 p. 1107.

où

$$\mu_i=\int_0^1\frac{(t-\lambda_0)(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_{i-1})(t-\lambda_{i+1})\ldots(t-\lambda_n)}{(\lambda_i-\lambda_0)(\lambda_i-\lambda_1)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}\,dt$$
$$i=0,1,2,\ldots,n.$$

Considérons maintenant l'équation fonctionelle (5). Par construcion, cette équation est vérifiée par un polynome de degré n.

Nous allons supposer maintenant que les nombres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda$ divisent rationnelement l'intervalle $(0,1)$.

On voit immédiatement que la fonction $f(x)$ doit vérifier l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^{n}\mu_i\left\{f\left(x+\lambda_i\frac{y-x}{2}\right)-2f[x+\lambda_i(y-x)]+f\left[\frac{x+y}{2}+\lambda_i\frac{y-x}{2}\right]\right\}=0.$$

On en déduit que *la solution continue générale de l'équation* (5) *est un polynome.*

14. — La solution de l'équation (5) est en général un polynome de degré n, mais il peut arriver qu'elle soit un polynome de degré plus grand. Par exemple si $n=0$ on peut déterminer la constante λ_0 de manière que la solution soit un polynome de degré un. On tombe ainsi sur l'équation de M. D. Pompéiu. Si $n=1$ l'équation (5) peut avoir comme solution un polynome de degré 2, mais alors ou bien elle ne se présente pas sous forme symétrique ou bien, la symétrie étant respectée, les constantes λ_0, λ_1 ne sont pas rationnelles. Au contraire si $n=2$ nous avons l'èquation très simple

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt=\frac{1}{6}\left\{f(x)+4f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f(y)\right\}$$

qui a pour solution un polynome arbitraire de degré 3.

En général, dans le cas $\lambda_i=\frac{i}{n}$, $i=0, 1, 2, \ldots, n$ l'équation (5) admet comme solution continue un polynome de degré n si n est impair et un polynome de degré $n+1$ si n est pair.

A l'aide des formules qui donnent les coefficients μ_i on peut facilement trouver les conditions pour que l'équation (5) ait comme solution continue générale un polynome de degré $n+s$. Si nous posons

$$R(t)=(t-\lambda_0)(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_n)$$

ces conditions s'écrivent

$$\int_0^1 t^j R(t)\, dt \quad \begin{cases} = 0, & j=0,\ 1, \ldots, s-1 \\ \neq 0, & j=s. \end{cases}$$

15. — L'équation de M. D. Pompeiu admet la généralisation suivante

$$(6) \qquad \frac{1}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(t, u)\, dt du = f\left[\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right]$$

pour une fonction $f(x, y)$ de deux variables x et y, définie et continue dans le rectangle $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. On vérifie immédiatement que $f(x, y)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + (x_2, y_1) + f(x_2, y_2) = 4f\left[\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right].$$

De ce que nous avons démontré au Nr. 11 il résulte que la solution générale de l'équation (6) est un polynome de degré (1,1).

Considérons le polynome d'interpolation

$$P(t, u) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{A(t) B(u)}{A'(t_i)\, B'(u_j)\, (t-t_i)\, (u-u_j)} f(t_i, u_j)$$

où

$$A(t) = \prod_{i=0}^{n} (t-t_i), \quad B(u) = \prod_{j=0}^{m} (u-u_j)$$

$$t_i = x_1 + \lambda_i (x_2 - x_1), \quad u_j = y_1 + \lambda'_j (y_2 - y_1)$$

$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ étant deux suites croissantes de nombres compris entre 0 et 1.

L'égalité entre les valeurs moyennes

$$\frac{1}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(t, u)\, dt du = \frac{1}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} P(t, u)\, dt du$$

nous donne l'équation fonctionnelle

$$(7) \qquad \frac{1}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(t, u)\, dt du = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mu_{i,j} f[x_1 + \lambda_i (x_2 - x_1),\ y_1 + \lambda'_j (y_2 - y_1)]$$

où

$$\mu_{i,j} = \int_0^1 \frac{R(t)}{R'(\lambda_i)(t-\lambda_i)}\, dt \times \int_0^1 \frac{S(u)}{S'(\lambda'_j)(u-\lambda'_j)}\, du$$

$$i=0,\ 1, \ldots, n, \qquad j=0,\ 1, \ldots, m$$

$$R(t) = \prod_{i=0}^{n} (t-\lambda_i), \qquad S(u) = \prod_{j=0}^{m} (u-\lambda'_j).$$

L'équation (7) est vérifiée par un polynome de degré (n, m). Nous supposons encore que les nombres λ_i, λ'_j sont rationnels. La fonction $f(x, y)$ doit satisfaire à l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mu_{i,j} \Big\{ f\left[x_1 + \lambda_i \frac{x_2-x_1}{2},\ y_1 + \lambda'_j \frac{y_2-y_1}{2}\right] + f\left[\frac{x_1+x_2}{2} + \lambda_i \frac{x_2-x_2}{2},\ y_1 + \lambda'_j \frac{y_2-y_1}{2}\right] +$$
$$+ f\left[x_1 + \lambda_i \frac{x_2-x_1}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2} + \lambda'_j \frac{y_2-y_1}{2}\right] + f\left[\frac{x_1+x_2}{2} + \lambda_i \frac{x_2-x_1}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2} + \lambda'_i \frac{y_2-y_1}{2}\right] -$$
$$- 4f[x_1 + \lambda_i (x_2 - x_1),\ y_1 + \lambda'_j (y_2 - y_1)] \Big\} = 0.$$

Cette équation est de la forme (4). *Elle est d'ordre* $(0, 0)$. En général cette dernière propriété résulte du fait que toutes les quantités

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_{i,j}, \qquad j=0,\ 1, \ldots, m$$

et toutes les quantités

$$\sum_{j=0}^{m} \mu_{i,j}, \qquad i=0,\ 2, \ldots, n$$

ne peuvent etre nulles. Il peut arriver que, pour certaines distribuitons particulière des nombres λ_i, λ'_j la condition s'exprime d'une autre manière. On peut démontrer que dans tous les cas ces conditions reviennent aux précédentes (6).

On peut donc dire que *la solution continue générale de l'équation (7) est un polynome.*

16. — La solution de l'équation (7) est en général de degré *(n, m)* mais elle peut être d'un degré plus grand. Tel est par exemple l'équation (6). En général, pour que la solution soit de degré $(n+s, m+s')$ il faut et il suffit que.

$$\int_0^1 t^{\alpha}\,\mathrm{R}(t)\,dt \begin{cases} =0, & \alpha=0,1,\ldots,s-1 \\ \neq 0, & \alpha=s \end{cases}$$

$$\int_0^1 u^{\alpha}\,\mathrm{S}(u)\,du \begin{cases} =0, & \alpha=0,1,\ldots,s'-1 \\ \neq 0, & \alpha=s' \end{cases}$$

Ainsi dans le cas $\lambda_i=\frac{i}{n}$, $\lambda'_j=\frac{j}{m}$ la solution générale est de degré $\left(2\left[\frac{n}{2}\right]+1, 2\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)$.

Par exemple, la solution générale de l'équation

$$\frac{1}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(t,u)\,dt\,du =$$
$$=\frac{1}{36}\left[f(x_1,y_1)+f(x_1,y_2)+f(x_2,y_1)+f(x_2,y_2)\right]+$$
$$+\frac{1}{9}\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ y_1\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ y_2\right)+f\left(x_1,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)f+\left(x_2,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{4}{9}f\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

est un polynome arbitraire de degré (3, 3).

---

(6) La propriété résulte du fait que le polynome

$$(1+z^m)\left[\sum_{i=0}^{r}\alpha_i z^{2k_i}\right]-2\sum_{i=0}^{r}\alpha_i z^{2k_i},\quad 0\leq k_0<k_1<\ldots<k_{r-1}<k_r\leq m$$

ne peut s'annuler identiquement, sans que les coefficients α_i ne soient tous nules.

17. — Nous allons donner, pour terminer, encore une extension du problème de M. D. POMPÉIU. Considérons maintenant le polynome d'interpolation de degré n en t et u

$$\mathrm{Q}(t,u)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\left\{\prod_{\alpha=0}^{i-1}\frac{t-t_\alpha}{t_i-t_\alpha}\cdot\prod_{\alpha=0}^{j-1}\frac{u-u_\alpha}{u_j-u_\alpha}\cdot\prod_{\alpha=i+j+1}^{n}\frac{\mathrm{D}_\alpha(t,u)}{\mathrm{D}_\alpha(t_i,u_j)}\cdot f(t_i,u_j)\right\}$$

où

$$\mathrm{D}_\alpha(t,u)=\begin{vmatrix} 1 & t & u \\ 1 & t_\alpha & u_0 \\ 1 & t_0 & u_\alpha \end{vmatrix},\quad \alpha=1,2,\ldots,n$$

$$t_i=x_1+\lambda_i(x_2-x_1),\qquad u_j=y_1+\lambda'_j(y_2-y_1)$$

les constantes fixes λ_i, λ'_j ayant la même signification que précédement.

Si nous écrivons l'égalité entre les valeurs moyennes de la fonction et de son polynome d'interpolation $\mathrm{Q}(t,u)$ nous trouvons l'équation fonctionnelle

$$(8)\quad \frac{2}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}\iint_{(\mathrm{T})} f(t,u)\,dt\,du=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\nu_{i,j}f[x_1+\lambda_i(x_2-x_1), y_1+\lambda'_j(y_2-y_1)]$$

l'intégral étant étendue au triangle (T) formé par les points (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2) et les coefficients $\nu_{i,j}$ sont donnés par les formules

$$\nu_{i,j}=2\iint_{\left(\substack{t\geq 0,\ u\geq 0\\ t+u\leq 1}\right)}\prod_{\alpha=0}^{i-1}\frac{t-\lambda_\alpha}{\lambda_i-\lambda_\alpha}\cdot\prod_{\alpha=0}^{j-1}\frac{u-\lambda'_\alpha}{\lambda'_j-\lambda'_\alpha}\cdot\prod_{\alpha=i+j+1}^{n}\frac{\mathrm{D}'_\alpha(t,u)}{\mathrm{D}'_\alpha(\lambda_i,\lambda'_j)}\,dt\,du$$

où

$$\mathrm{D}'_\alpha(t,u)=\begin{vmatrix} 1 & t & u \\ 1 & \lambda_\alpha & \lambda'_0 \\ 1 & \lambda_0 & \lambda'_\alpha \end{vmatrix},\quad \alpha=1,2,\ldots,n.$$

L'équation (8) est vérifiée par un polynome de degré n.

Les constantes λ_i, λ'_j étant rationnelles on voit immédiatement, comme au Nr. 15, que la fonction vérifie une équation fonctionnelle du type (4). On peut facilement conclure de là que :

La solution continue générale de l'équation (9) est un polynome.

18. — L'équation (8) peut être verifiée par un polynome de degré plus grand que n. Pour que la solution générale soit un polynome de degré $n+s$ il faut et il suffit que

$$\iint\limits_{\left(\substack{t \geq 0,\ u \geq 0 \\ t+u \leq 1}\right)} t^{\alpha} u^{\beta} (t-\lambda_0)(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_{i-1})(u-\lambda'_0)(u-\lambda'_1)\ldots(u-\lambda'_{n-i})\, dt\, du$$

$$\begin{aligned} &= 0, \qquad \alpha+\beta=0, 1, 2, \ldots, s-1 \\ &\neq 0, \qquad \alpha+\beta=s \end{aligned}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Donnons enfin un exemple. La solution générale de l'équation fonctionnelle

$$\frac{2}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} \iint\limits_{(T)} f(t, u)\, dt\, du = \frac{1}{3} [f(x_2, y_1) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)]$$

est $a+bx+cy$, a, b, c étant des constantes.

RÉSUMÉ.

La solution continue générale de l'équation $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x+ih) = 0$ est un polynome. Nous examinons l'équation a deux variables

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{i,j} f(x+ih, y+jh') = 0$$

et nous déterminons celles dont la solution continue générale est un polynome. Dans la troisième partie nous signalons des équations de la forme

$$\frac{1}{y-x} \int_x^y f(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n} \mu_i f[x+\lambda_i(y-x)]$$

$$\frac{1}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_1} f(t, u)\, dt\, du = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mu_{i,j} f[x_1+\lambda_i(x_2-x_1), y_1+\lambda'_j(y_2-y_1)]$$

$$\frac{2}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} \iint\limits_{(T)} f(t, u)\, dt\, du = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \nu_{i,j} f[x_1+\lambda_i(x_2-x_1), y_1+\lambda'_j(y_2-y_1)]$$

(T) étant le triangle formé par les points (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2) dont la solution continue générale est un polynome.