SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Par

Tiberiu Popoviciu

Ancien Élève de l'École Normale Supérieure

Reçue le 20 Mars 1934.

Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle (0, 1).

Définissons l'expression $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ par la relation de récurrence

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}; f] - [x_1, x_2, \ldots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_1}$$

$$[x_1; f] = f(x_1).$$

Le quotient $[x_1, x_2, \ldots x_{n+1}; f]$ est *la différence divisée d'ordre n de la fonction* $f(x)$ par rapport aux points *distincts* $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$.

Soit

$$\overline{\lim_{[\text{dans } (0,\, 1)]}} \left| [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \right| = \Delta_n[f].$$

$\Delta_n[f]$ est *la* $n^{\text{ème}}$ *borne* de $f(x)$ dans (0, 1).

Considérons les points

$$(1) \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_m$$

alors

$$v_m = \sum_{i=1}^{m-n-1} \left| [x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n+1}; f] - [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f] \right|$$

est *la* $n^{\text{ème}}$ *variation* de $f(x)$ sur les points (1).

Si nous posons

$$\overline{\lim_{[\text{dans } (0,\, 1)]}} v_m = V_n[f]$$

alors $V_n[f]$ est *la* $n^{\text{ème}}$ *variation totale* de $f(x)$ dans (0, 1).

Nous dirons enfin que la fonction $f(x)$ est *convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe* ou *concave* d'ordre n dans $(0, 1)$ si ses différences divisées d'ordre $n+1$ sur tout groupe de $n+2$ points de $(0, 1)$ sont $> 0, \geqq 0, = 0 \leq 0$ ou < 0.

Ces fonctions forment la classe des fonction *d'ordre* n.

Nous dirons que la fonction est de la classe $(a, b, c, \ldots)$ si elle possède des propriétés d'ordre $a, b, c, \ldots$ d'une nature de convexité déterminée. Pour l'uniformité on peut appeler fonction d'ordre -1 toute fonction ne changeant pas de signe [1].

1. Le polynome

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_n(x\,;f) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i} x^i(1-x)^{n-i}$$

est le polynome de M. S. Bernstein de degré n de la fonction donnée.

Posons pour abréger les notations

$$\Delta_k^i = \left[\frac{i+k}{n}, \frac{i+k-1}{n}, \ldots, \frac{i}{n}; f\right], \quad i = 0, 1, \ldots, n-k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Un calcul simple nous donne

$$\frac{d\mathrm{P}_n}{dx} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_1^i \binom{n-1}{i} x^i(1-x)^{n-1-i}$$

et en général

$$\frac{d^k\mathrm{P}_n}{dx^k} = k\,!\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-k} \Delta_k^i \binom{n-k}{i} x^i(1-k)^{n-k-i}. \tag{2}$$

Nous avons

$$\Delta_0[\mathrm{P}_n] \leq \Delta_0[f].$$

Nous savons que [2]

$$k\,!\ \Delta_k[\mathrm{P}_n] = \Delta_0[\mathrm{P}_n^{(k)}]$$

donc

$$\Delta_k[\mathrm{P}_n] \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\ \Delta_k[f].$$

(1) Pour plus de détails voir notre Thèse *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*. Paris 1933.

(2) Voir loc. cit. (1), p. 45.

On peut encore écrire

$$\Delta_k[\mathrm{P}_n] \leq \Delta_k[f], \quad k=0, 1, \quad \Delta_k[\mathrm{P}_n] < \Delta_k[f], \quad k > 1,$$

donc:

La $k^{\text{ème}}$ borne du polynome $\mathrm{P}_n(x\,;f)$ est au plus égale à celle de la fonction si $k=0, 1$ et est plus petite si $k < 1$.

2. Nous pouvons écrire encore

$$\frac{d^k\mathrm{P}_n}{dx^k} = k\,!\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\ \Big\{\Delta_k^{n-k} + (n-k)\sum_{i=0}^{n-k-1}[\Delta_k^i - \Delta_k^{i+1}]\binom{n-k-1}{i}\int_x^1 t^i(1-t)^{n-k-i-1}\,dt$$

et on en déduit

$$\mathrm{V}_k[\mathrm{P}_n] \leq \mathrm{V}_k[f], \quad k=0, 1, \quad \mathrm{V}_k[\mathrm{P}_n] < \mathrm{V}_k[f], \quad k > 1,$$

donc:

La $k^{\text{ème}}$ variation totale du polynome $P_n(x\,;f)$ est au plus égale à celle de la fonction si $k=0, 1$ et est plus petitie si $k > 1$.

On peut exprimer les deux propriétés précédentes en disant que le polynome de M. S. Bernstein *conserve les bornes et les variations.*

3. La formule (2) nous montre encore que toutes les fois que $f(x)$ jouit d'une propriété de convexité déterminée (d'ordre $< n$) le polynome $\mathrm{P}_n(x\,;f)$ aura la même propriété. Nous supposons ici que la convexité et la polynomialité sont des cas particuliers de la non-concavité.

Nous exprimons cette propriété en disant que le polynome ed M. Bernstein *conserve la classe de la fonction.*

Une propriété démontrée dans notre travail cité [3] permet d'établir que

Il existe des polynomes d'une classe donnée dans (0, 1) cette classe contenant un nombre fini de conditions de convexité ou concavité choisies arbitrairement.

On sait enfin que si la fonction $f(x)$ est continue dans $(0, 1)$ le polynome $P_n(x\,;f)$ tend uniformément vers $f(x)$ dans tout l'intervalle pour $n \to \infty$ [4]. Nous avons donc la propriété suivante:

(3) Voir loc. cit. (1) p. 20.

(4) S. Bernstein Communications de la *Soc. Math.* de Karkow ser. 2, t. 13 (1912) (Citation du livre de MM. Pólya et Szegö „Aufgaben und Lehrsätze" t. I. p. 230). Voir aussi S. Wigert Arkiv för Mat. Astr. och, Physik t. 20, (1927), p. 1.

Toute fonction continue dans (0, 1) est la limite d'une suite ed' polynomes conservant les bornes, les variations et la classe de la fonction, convergeant uniformément dans tout l'intervalle.

4. L'ordre de l'approximation par les polynomes $P_n(x;f)$ s'obtient facilement. Désignons par $\omega(\delta)$ le module d'oscillation de la fonction $f(x)$ [5]. Nous avons

$$|f(x)-P_n(x;f)| \leq \sum_{i=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right|\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} \leq \tag{3}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n}\omega\left(\left|x-\frac{i}{n}\right|\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} <$$

$$< \left(\frac{1}{\delta}\sum_{i=0}^{n}\left|x-\frac{i}{n}\right|\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}+1\right)\omega(\delta).$$

Or dans l'intervalle $\left(\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right)$ nous avons

$$\sum_{i=0}^{n}\left|x-\frac{i}{n}\right|\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = 2\binom{n-1}{j}x^{j+1}(1-x)^{n-j} \leq$$

$$\leq 2\binom{n-1}{j}\max_{\left(\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right)} x^{j+1}(1-x)^{n-j} = 2\binom{n-1}{j}\frac{(j+1)^{j+1}(n-j)^{n-j}}{(n+1)^{n+1}}$$

et on en déduit

$$\max_{(0,1)}\sum_{i=0}^{n}\left|x-\frac{i}{n}\right|\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = M_n = \begin{cases} 2\binom{n-1}{\frac{n}{2}}\dfrac{\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{n}{2}+1}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{n+1)^{n+1}}, & n \text{ pair} \\ \dfrac{1}{2^n}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} & n \text{ impair.} \end{cases}$$

On voit immédiatement que

$$n^{\frac{1}{2}}M_n \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

et

$$(2n-1)^{\frac{1}{2}}M_{2n-1} > (2n+1)^{\frac{1}{2}}M_{2n+1}$$

[5] Pour les propriétés de $\omega(\delta)$ voir par ex. Ch. de la Vallee Poussin: „Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle" p. 7.

d'où

$$M_1 = \frac{1}{2},\ M_{2n+1} \leq \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2n+1}} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Si n est pair ($n \geq 2$) on établit facilement que

$$M_n < M_{n+1}\sqrt{\frac{n+2}{n}} \leq \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{n+2}{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Donc quel que soit n

$$M_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Faisant $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ dans la formule (3) nous avons

$$|f(x)-P_n(x;f)| < \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{dans } (0, 1)\ [6]$$

L'approximation et en général effectivement de l'ordre de $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Soit en effet la fonction $f(x) = \left|\frac{1}{2}-x\right|$. On a dans ce cas $\omega(\delta)=\delta$ pour $\delta \leq \frac{1}{2}$ et

$$P_{2n+1}\left(\frac{1}{2};f\right)-f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} \qquad n > 1$$

d'où

$$\max. |f(x)-P_{2n+1}(x;f)| \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\ [7].$$

[6] La démonstration donnée dans le livre cité de MM. Pólya et Szegő ne donne que

$$|f(x)-P_n(x;f)| < \omega\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)+\frac{\Delta_0[f]}{2\sqrt{n}}.$$

Si la fonction vérifie une condition de Lipschitz ordinaire on a

$$|f(x)-P_n(x;f)| < \frac{3}{2}\,\frac{\Delta_1[f]}{\sqrt{n}}.$$

M. Wigert ne donne que l'approximation

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\Delta_0[f]\cdot\Delta_1[f]^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

[7] Nons avons supposé que la fonction est définie dans l'intervalle (0, 1) uniquement pour simplifier l'éxposé. On aurrait pu considérer des fonc-