

monvement quel on obtient

$$N_1 < \gamma \gamma X_1 P^{(v-1)} - i$$

$$N_2 < P^{(v-1)} \gamma \gamma X_1 P^{(v-1)} - i \int \dots < \gamma \gamma X_1 P^{(v-1)}$$

où  $\gamma$  est une constante positive.

Pour  $H_1$ , nous obtenons

$$H_1 > \gamma \gamma X_1 P^{(v-1)}$$

et, par conséquent (en posant  $N = N_1$ ),

$$I_1 > \gamma \gamma X_1 P^{(v-1)}$$

Ainsi  $I_1 > 0$ . Mais  $I_1$  est le nombre des représentations du nombre  $N_1$  sous la forme

$$N_1 = x + x' + \dots + x_r + x'_r + \dots + x'_r$$

Cette forme se présente comme la somme de termes de la forme  $P$  en nombre ne surpasant pas

$$2(l+1) + (n-1) + n(4 \log n + 3 \log 4 + 4) < n(4 \log n + 10).$$

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

**THEOREME.** — Soit  $n$  un entier  $> 3$

$$r = [n(4 \log n + 3 \log 4 + 4)].$$

Il existe une constante  $c$ , dépendante uniquement de  $n$  et telle que pour chaque entier  $N \geq c$ , on ait

$$N = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  sont des entiers  $\geq 0$ .

ALGÈBRE. — Remarques sur les équations algébriques dont les équations dérivées ont toutes leurs racines réelles. Note de M. **TIBÈRE POPOVICIU**, présentée par M. Hadamard.

1. Nous ne considérons que des polynômes à coefficients réels. Soit  $P(x)$  un polynôme de degré  $n$ . Désignons par  $r$  le nombre des zéros réels multiples du polynôme  $P(x)$  et par  $k$  la somme du nombre de tous les zéros réels distincts et du nombre des zéros complexes de  $P(x)$ . Remarquons que le nombre  $k + r - 1$  est au plus égal à  $n - 1$ .

Nous avons obtenu la propriété suivante :

*S'il existe un polynôme  $Q(x)$  de degré  $m$  tel que l'équation dérivée  $[P(x) \cdot Q(x)]' = 0$  ait toutes ses racines réelles, il existe certainement un polynôme  $R(x)$  de degré  $\leq m$  tel que l'équation dérivée  $[P(x) \cdot R(x)]' = 0$  ait toutes ses racines réelles dont au plus  $k + r - 1$  sont distinctes.*

La démonstration s'appuie sur la continuité des racines d'une équation algébrique par rapport aux coefficients et, en remarquant que, pour  $m = 0$ , la propriété résulte du fait que si un polynôme a un zéro multiple d'ordre  $\nu$  ( $\nu > 1$ ), sa dérivée a le même zéro multiple d'ordre  $\nu - 1$ .

On peut dire aussi, sans préciser la nature des zéros du polynôme  $P(x)$ , que s'il existe un polynôme  $Q(x)$  tel que l'équation dérivée  $[P(x) \cdot Q(x)]' = 0$  ait toutes ses racines réelles, il existe un polynôme  $R(x)$  tel que l'équation dérivée  $[P(x) \cdot R(x)]' = 0$  ait toutes ses racines réelles dont au plus  $n - 1$  sont distinctes.

2. Soit

$$F(x) = (x - c)^p [(x - c)^2 + d^2] Q(x),$$

$Q(x)$  étant un polynôme,  $c, d \neq 0$  des constantes réelles et  $p$  un entier positif. Alors :

*L'équation dérivée  $F'(x) = 0$  ne peut avoir toutes ses racines réelles.*

C'est encore à l'aide de la continuité des racines que nous avons prouvé qu'il suffit de démontrer la propriété pour le cas où  $F'(x)$  n'aurait que deux zéros distincts au plus, dont l'un toujours simple. Pour ce cas, on démontre la propriété directement.

3. Comme conséquence de la propriété précédente, nous avons le théorème suivant :

*Si l'équation dérivée  $f'(x) = 0$  d'une équation algébrique de degré  $n$  a toutes ses racines réelles et si l'équation  $f(x) = 0$  a un couple de racines imaginaires conjuguées  $a \pm ib$ , cette équation ne peut avoir aucune racine réelle dans l'intervalle*

$$\left( a - b \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}, a + b \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \right).$$

Les limites ne sont atteintes que pour les équations

$$f(x) = C \left[ \left( x - a \pm b \operatorname{cotg} \frac{2\pi}{n} \right)^n - \frac{(\pm b)^n}{\left( \sin \frac{2\pi}{n} \right)^n} \right] = 0,$$

$C$  étant une constante.



4. Nous avons aussi examiné les équations qui n'ont qu'un seul couple de racines imaginaires conjuguées et obtenu le théorème suivant :

Si l'équation dérivée  $f'(x) = 0$  d'une équation algébrique de degré  $n$  a toutes ses racines réelles et si l'équation  $f(x) = 0$  a un seul couple de racines imaginaires conjuguées  $a \pm ib$ , cette équation ne peut avoir aucune racine dans l'intervalle

$$(a - \lambda_n b, a + \lambda_n b),$$

où  $\lambda_n$  est la racine réelle et positive de l'équation

$$(n-1)\sqrt{2(n-1)}x(x^2+9) - 3(n+1)\sqrt{3(n-2)}(x^2+1) = 0.$$

Les limites sont atteintes pour les équations

$$[(x-a)^2 + b^2](x \pm \lambda_n)(x \pm \mu_n)^{n-3} = 0,$$

où les signes se correspondent, et

$$\mu_n = \frac{-\lambda_n[(n-1)^2\lambda_n^2 + 3(3n^2 - 10n - 1)]}{3(n+1)(3 - \lambda_n^2)}.$$

Lorsque  $n$  croît,  $\lambda_n$  décroît et tend vers une limite positive  $\lambda$  pour  $n \rightarrow \infty$ . On peut donc énoncer une propriété analogue ne dépendant pas du degré  $n$ . Les racines sont extérieures à un intervalle  $(a - \lambda b, a + \lambda b)$ , où  $\lambda$  est la racine réelle et positive de l'équation

$$\sqrt{2}x(x^2+9) - 3\sqrt{3}(x^2+1) = 0.$$

Les limites ne sont pas atteintes, mais le nombre  $\lambda$  ne peut être remplacé par aucun autre nombre plus grand.

$\lambda$  est voisin de 0,5. Plus exactement, il est compris entre 0,4946 et 0,4947.

ALGÈBRE. — Sur un idéal attaché à une courbe gauche algébrique définie par sa représentation monoidale. Note de M. PIERRE DESSAINT, présentée par M. JULIA.

1. Soit  $C$  une courbe gauche algébrique irréductible ne présentant pas de singularités. Supposons l'espace projectif rapporté à des axes tels que le point à l'infini sur  $Oz$ ,  $Z$ , n'appartienne pas à  $C$ . Soient  $\mathfrak{C}$  l'idéal homogène engendré par les formes  $F(x, y, z, t)$  nulles sur  $C$ ,  $\mathfrak{C}'$  l'idéal homogène engendré par les formes  $F(x, y, z, t)$ . La variété de  $\mathfrak{C}'$  se compose des points d'intersection, supposés distincts, de  $C$  avec le plan  $z=0$ .  $C$  est dite de