SUR UN THÉORÈME DE LAGUERRE

par

Tiberiu Popoviciu

Ancien élève de l'École Normale Supérieure

Reçue le 31 janvier 1934.

1. — Considérons un polynome $f(x)$ dont le degré est au moins égal à n-1.

Soit $U(x_1, x_2, \ldots, x_n; f(x))$ le déterminant dont la ligne générale est

$$1 \quad x_i \quad x_i^2 \ldots x_i^{n-2} \quad f(x_i)$$

et posons $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U(x_1, x_2, \ldots, x_n; x^{n-1})$ qui est le déterminant de Van der Monde des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nous avons l'identité

$$\text{(1)} \qquad U(x_1, x_2, \ldots, x_n; f(x)) = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{n-i} V(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) f(x_i)$$

dont nous aurons besoin plus loin.

Considérons le quotient

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n; f(x)] = \frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_n; f(x))}{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)} .$$

Rappelons-nous maintenant qu'on dit que le polynome $f(x)$ est *convexe d'ordre* $(n-2)$ [1] dans l'intervalle (a, b) si pour tout groupe de n points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de cet intervalle on a l'inégalité

$$\text{(2)} \qquad [x_1, x_2, \ldots, x_n; f(x)] > 0 .$$

Pour que le polynome $f(x)$ soit convexe d'ordre $(n-2)$ dans (a, b) il faut et il suffit que $f^{(n-1)}(x) \geq 0$ dans cet intervalle. L'inégalité (2) aura lieu pour tout système de n point *non tous confondus.*

---

[1] Voir: T. Popoviciu „Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles" Thèse Paris 1933.

2. — Soit maintenant $P(x) = (1-x_1 x)(1-x_2 x) \ldots (1-x_n x)$ un polynome ayant tous ses zéros réels et considérons le développement

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{P(x)} = S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \cdots$$

On sait que

$$S_m = \sum x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

où la sommation est étendue pour toutes les valeurs entières non-négatives de $i_1, i_2, \ldots, i_n$ telles que $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m$.

En particulier si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ on a

$$S_m = \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{n-1} .$$

Décomposant en fractions simples le premier membre de (3) on a

$$\frac{1}{P(x)} = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{(-1)^{n-i} V(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) x_i^{n-1}}{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)(1-x_i x)}$$

et tenant compte de (1) nous trouvons

$$\text{(4)} \qquad S_m = [x_1, x_2, \ldots, x_n; x^{m+n-1}] .$$

3. — Considérons l'équation de degré $2p$

$$F(z) \equiv a_0 S_k + a_1 S_{k+1} z \ldots a_{2p} S_{2p+k} z^{2p} = 0, \quad a_{2p} > 0 .$$

Si nous posons

$$\varphi(x) = x^{n+k-1} (a_0 + a_1 xz + a_2 (xz)^2 + \ldots + a_{2p} (xz)^{2p})$$

nous avons d'après (4)

$$F(z) = [x_1, x_2, \ldots, x_n; \varphi(x)] .$$

Si nous remarquons que

$$\varphi^{(n-1)}(x) = (n-1)!\, x^k \left[\binom{k+n-1}{n-1} a_0 + \binom{k+n}{n-1} a_1 xz + \cdots + \binom{k+n+2p-1}{n-1} a_{2p} (xz)^{2p} \right]$$

nous pouvons énoncer les propriétés suivantes:

Si k est pair et si le polynome

$$\text{(5)} \qquad \sum_{i=0}^{i=2p} \binom{k+n+i-1}{n-1} a_i z^i$$

est non-négatif, le polynome

$$\text{(6)} \qquad \sum_{i=0}^{i=2p} a_i S_{k+i} z^i$$

est positif tant que les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne sont pas toutes égales.

Si k est impair et si le polynome (5) est non-négatif le polynome (6) est positif tant que les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont non-négatives et non toutes égales.

4. — LAGUERRE a démontré la proposition suivante:

Si l'équation $P(x)=0$ a toutes ses racines réelles le polynome

$$\sum_{i=0}^{2p} S_i z^i$$

est positif.

Supposons toujours que le théorème de LAGUERRE soit vrai quand tous les zéros du polynome $P(x)$ sont égaux. En d'autres termes le polynome

$$Q_{\alpha,0} = \sum_{i=1}^{2p} \binom{\alpha+i}{\alpha} z^i$$

est positif pour α entier $\geqq 0$.

Considérons le polynome plus général

$$Q_{\alpha,\beta} = \sum_{i=0}^{2p} \binom{\alpha+\beta+i}{\alpha} z^i, \qquad \alpha, \beta \text{ entiers} \geq 0 .$$

La rélation de récurrence

$$Q_{\alpha,\beta} = Q_{\alpha,\beta-1} + Q_{\alpha-1,\beta}$$

et le fait que $Q_{0,\beta}$ est indépendant de β ($Q_{0,\beta} = 1+z+z^2+\cdots+z^{2p}$) nous montrent que *le polynome $Q_{\alpha,\beta}$ est positif.*

Faisant donc $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2p} = 1$ dans (5) nous déduisons les propriétés suivantes:

Si k est pair le polynome

(7) $$\sum_{i=0}^{2p} S_{k+i} z^i$$

est certainement positif, tant que les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne sont pas toutes égales.

Si k est impair, le polynome (7) est certainement positif tant que les racines x_i sont non-négatives et non toutes égales.

5. — Posons

$$\sigma_m = \frac{S^m}{\binom{m+n-1}{n-1}}, \qquad M_m = \sqrt[m]{\sigma_m} .$$

(1) Voir LAGUERRE „Oeuvres" t. I. pag. 111.

M_m est donc une valeur moyenne.

Si

$$p=1, \quad a_i = \frac{\binom{2}{i}}{\binom{k+n+i-1}{n-1}}, \qquad 1=0,\ 1,\ 2$$

le polynome (5) est non-négatif, donc en supposant les x_i non-négatifs nous avons aussi

$$\sigma_k + 2\sigma_{k+1}\, x + \sigma_{k+2}\, x^2 \geq 0$$

quel que soit k et l'égalité n'étant possible que si tous les x_i sont identiques.

Nous avons donc

$$\sigma_{k+1}^2 \leq \sigma_k \,.\, \sigma_{k+2}$$
$$\sigma_0 = 1,\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

et on peut alors énoncer la propriété suivante:

Si les x_i sont non-négatifs on a la suite d'inégalités

$$M_1 \leq M_2 \leq \ldots \leq M_m \leq \ldots$$

l'égalité entre deux termes consécutifs ne pouvant avoir lieu que si les x_i sont tous identiques.