SUR LES DIRECTIONS D'INDÉTERMINATION COMPLÈTE D'UNE FONCTION ELLIPTIQUE;

Par M. Tibère POPOVICIU.

Une *direction d'indétermination complète* d'une fonction $f(z)$ de la variable complexe z est une demi-droite telle que si la variable z la décrit, la fonction prend les valeurs aussi voisines qu'on le veut de toute valeur donnée. Cette notion a été introduite par M. Paul Montel (¹).

Dans ce petit travail nous nous proposons d'examiner les directions d'indétermination complète d'une fonction elliptique. Pour une telle fonction, il suffit évidemment de considérer seulement les demi-droites passant par l'origine. Dans un cours fait à l'Université de Cluj (Roumanie) M. Paul Montel a déjà démontré, et d'une manière très simple, que dans tout angle il existe au moins une direction d'indétermination complète. Autrement dit, l'ensemble des directions d'indétermination complète d'une fonction elliptique est partout dense dans tout angle.

Dans la suite, nous nous proposons de déterminer *toutes* les directions d'indétermination complète d'une fonction elliptique.

Soient ω_1, ω_2 deux périodes indépendantes représentées par les points A, C et Δ une demi-droite passant par l'origine O et comprise, pour fixer les idées, dans l'angle AOC. Nous considérons le réseau de parallélogrammes formés à partir du parallélogramme initial OABC construit sur OA, OC. Il existe une infinité de parallélogrammes contenant des segments de Δ.

Amenons, par des translations égales à des périodes, tous ces segments dans le parallélogramme OABC. Nous aurons dans OABC

(¹) Paul Montel, *Sur les séries de fractions rationnelles* (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. 1, 1932, p. 11).

une infinité de segments δ qui ont leurs extrémités sur les côtés. Il y a des segments δ qui ont une extrémité sur AB et d'autres qui ont une extrémité sur BC.

L'ensemble des valeurs prises par la fonction sur la demi-droite Δ coïncide, en vertu de la périodicité, avec l'ensemble des valeurs prises dans le parallélogramme OABC sur les segments δ.

La demi-droite Δ coupe AB au point d'affixe $\omega_1 + \alpha\omega_2$ et BC au point d'affixe $\frac{1}{\alpha}\omega_1 + \omega_2$ où α est un nombre positif. On voit que les extrémités sur AB des segments δ sont les points $\omega_1 + (n\alpha - [n\alpha])\omega_2$ et que les extrémités sur BC sont les points $\omega_2 + \left(\frac{n}{\alpha} - \left[\frac{n}{\alpha}\right]\right)\omega_1$. n est ici un nombre entier positif et $[N]$ désigne le plus grand entier contenu dans N.

Supposons d'abord que α soit un nombre rationnel, alors les nombres

$$(1) \qquad n\alpha - [n\alpha], \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$(2) \qquad \frac{n}{\alpha} - \left[\frac{n}{\alpha}\right]$$

ne prennent qu'un nombre fini de valeurs distinctes. Dans ce cas, il n'y a qu'un nombre fini de segments δ distincts. Or, l'ensemble des valeurs prises par la fonction sur un segment δ est évidemment partout non dense dans le plan de la fonction et il en sera ainsi encore pour l'ensemble des valeurs prises sur un nombre fini de segments δ. Il en résulte que, dans ce cas, la demi-droite Δ n'est pas une direction d'indétermination complète.

Supposons maintenant que α soit un nombre irrationnel. Dans ce cas les nombres (1) sont partout denses dans l'intervalle $(0, 1)$ et il en est de même des nombres (2). Il en résulte que les segments δ sont partout denses dans le parallélogramme OABC. Or, toute valeur donnée est prise au moins une fois dans le parallélogramme OABC. On peut donc affirmer que, en vertu de la continuité de la fonction, l'ensemble des valeurs prises sur les segments δ est partout dense dans le plan de la fonction. Il en résulte donc que, dans ce cas, la demi-droite Δ est une direction d'indétermination complète.

Finalement, on voit que *la demi-droite Δ est une direction d'indétermination complète ou non, suivant que le nombre α est irrationnel ou rationnel.*

Soient θ_1, θ_2, les angles des directions OA, OC avec la direction Δ ; nous avons

$$\alpha = \left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right| \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

qui est aussi égal au rapport des distances des points A, C à la demi-droite Δ. Le caractère de rationalité du nombre α ne dépend pas des périodes ω_1, ω_2 choisies. En effet, si nous prenons deux autres périodes indépendantes

$$\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2$$
$$(a, b, c, d \text{ réels et entiers}; \; ad - bc \neq 0),$$

le nombre α deviendra $\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Pour qu'une direction Δ soit d'indétermination complète il faut et il suffit que le rapport des distances à Δ de deux points périodes indépendantes quelconques soit irrationnel.

Bien entendu, on considère seulement des périodes qui ne se trouvent pas sur Δ.

Nous voyons donc que presque toutes les directions passant par l'origine sont d'indétermination complète. Nous n'avons qu'un ensemble dénombrable de demi-droites qui ne sont pas d'indétermination complète. Il est à remarquer que *ces dernières directions sont partout denses dans tout angle.*

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. LX ; Juillet 1936.)