THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur un problème de maximum de Stieltjes.* Note de M. **Tibère Popoviciu**.

1. *Hypothèses faites sur la fonction $f(x)$.* — $f(x)$ est une fonction réelle, définie et uniforme sur l'ensemble E formé par m intervalles finis et fermés (a_i, b_i), $a_i < b_i (i = 1, \ldots, m)$; $b_i \leqq a_{i+1} (i = 1, \ldots, m-1)$ de l'axe réel. Nous dirons que $f(x)$ est une fonction (C) si, dans chaque intervalle (a_i, b_i) : 1° elle est non-négative dans l'intervalle ouvert, mais il y a des points aussi voisins que l'on veut de a_i et de b_i où la fonction est positive; 2° elle est continue en a_i et en b_i; 3° $f(a_i) = f(b_i) = 0$; 4° elle est exponentiellement concave dans tout l'intervalle. Cette dernière propriété signifie

que

$$f(x_2) > f(x_1)^{\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}} f(x_3)^{\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}} \qquad (a_i \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b_i),$$

donc que $\log f(x)$ est concave.

2. *Hypothèses faites sur les points x_i.* — Nous dirons que les n points x_1, x_2, ..., x_n de l'axe réel ont une distribution donnée $[k_1, k_2, \ldots, k_m]$ si, parmi ces points, il y en a k_i dans l'intervalle $(a_i, b_i)(i = 1, \ldots, m)$. On a $k_i \geq 0$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Nous dirons que deux distributions différentes $[k_1, k_2, \ldots, k_m]$ et $[k'_1, k'_2, \ldots, k'_m]$ de n points $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ (dont aucun ne coïncide avec un a_i ou un b_i) et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ respectivement, sont *consécutives* si on peut choisir les points x'_i de manière que l'on ait

$$x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 < \ldots < x_n < x'_n \quad \text{ou} \quad x'_1 < x_1 < x'_2 < x_2 < \ldots < x'_n < x_n.$$

Nous dirons aussi que deux distributions $[k_1, k_2, \ldots, k_m]$ et $[h_1, h_2, \ldots, h_m]$ de n points $x_1 < x_2 < \ldots < n_n$ et de $n - 1$ points $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ respectivement, sont *consécutives* si on peut choisir les points y_i de manière que l'on ait $x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < y_{n-1} < x_n$.

3. *Position du problème.* — La fonction $f(x)$ étant une fonction (C) et les points x_i ayant une distribution donnée, nous avons étudié le maximum de l'expression

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n; f) = f(x_1).f(x_2).\ldots.f(x_n) \prod_{i>j}^{1,2,\ldots,n} (x_i - x_j)^2.$$

4. *Résultats.* — Dans ces conditions, nous avons trouvé que :

I. $D(x_1, x_2, \ldots, x_n; f)$ *a un maximum atteint pour au moins un système de points x_i.*

II. *Ce maximum est atteint pour un seul système de n points, distincts et différents des points a_i et b_i.* Nous désignons par $\xi_{n,1} < \xi_{n,2} < \ldots < \xi_{n,n}$ les points pour lesquels le maximum est atteint. Nous dirons que c'est le *système maximisant* de notre problème.

III. *La correspondance entre une fonction* (C) *et son système maximisant est continue.* Donc, à tout $\varepsilon > 0$, correspond un $\eta > 0$ tel que si $g(x)$ est une autre fonction (C) vérifiant $|f - g| < \eta$ sur E, on ait

$$|\xi_{n,i} - \xi'_{n,i}| < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$\xi'_{n,i}$ étant le système maximisant de $g(x)$ correspondant au même problème.

IV. *Les systèmes maximisants $\xi_{n,i}$, $\xi'_{n,i}$ correspondant, pour la même fonction $f(x)$, à deux distributions consécutives de n points, se séparent.* On a donc

$$\xi_{n,1} < \xi'_{n,1} < \xi_{n,2} < \ldots < \xi_{n,n} < \xi'_{n,n} \quad \text{ou} \quad \xi'_{n,1} < \xi_{n,1} < \xi'_{n,2} < \ldots < \xi'_{n,n} < \xi_{n,n}.$$

V. *Les systèmes maximisants $\xi_{n,i}$, $\xi_{n-1,i}$ correspondant, pour la même fonction $f(x)$, à deux distributions consécutives de n et de $n - 1$ points, se séparent.* On a donc

$$\xi_{n,1} < \xi_{n-1,1} < \xi_{n,2} < \ldots < \xi_{n-1,n-1} < \xi_{n,n}.$$

On peut dire que deux systèmes maximisants de n points ou bien de n et $n - 1$ points se séparent toujours, à moins que cette séparation ne soit *visiblement impossible.*

5. *Le problème de Stieltjes.* — Le cas particulier

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} |x - a_i|^{\sigma_i} |x - b_i|^{\rho_i} \qquad (\sigma_i, \rho_i \text{ positifs})$$

a été examiné par Th. Stieltjes, qui a obtenu les propriétés I et II d'une autre manière [1] Dans ce cas, le polynome $P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \xi_{n,i})$ vérifie une équation différentielle linéaire de la forme

$$y'' + \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_i}{x - a_i} + \frac{\rho_i}{x - b_i}\right) y' + \frac{\psi(x)}{(x - a_1)(x - b_1)\ldots(x - a_m)(x - b_m)} y = 0,$$

$\psi(x)$ étant un certain polynome de degré $2m - 2$.

Nous avons obtenu les propriétés IV et V en montrant qu'il suffit de faire la démonstration pour ce cas particulier et même seulement pour certaines valeurs particulières des constantes σ_i et ρ_i.

La propriété IV est une généralisation, très étendue, de certains résultats de F. Klein [2] et E. B. van Vleck [3]. La propriété V se rattache, pour $m = 1$, à la théorie des polynomes de Jacobi [4].

(1) *Acta Mathematica*, 6, 1885, p. 321.
(2) *Mathematische Annalen*, 18, 1881, p. 237.
(3) *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, 2e série, 4, 1898, p. 426.
(4) Th. J. Stieltjes, *Comptes rendus*, 100, 1885, p. 620.