Tome II 1938 Numéro 5

COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE ROUMANIE

SOMMAIRE

I. SCIENCES MATHEMATIQUES

II. SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES.

108. GÉNÉRALISATION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DE M. D. POMPEIU

Par D. V. IONESCO, Mt. A. S. R.

(Séance du 20 décembre, 1937)

1. M. D. Pompeiu a considéré la formule de la moyenne

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(\xi)\,(\beta-\alpha)$$

où $\alpha < \xi < \beta$, et a remarqué que si $f(x)$ est un polynome du premier degré, ξ occupe le milieu de l'intervalle (α, β). M. D. Pompeiu a démontré aussi la réciproque : si $f(x)$ est une fonction continue et si dans tout intervalle (α, β) on a

$$(1) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha)$$

alors $f(x)$ est nécessairement une *fonction linéaire*.

On peut considérer aussi la formule de la moyenne pour des fonctions de plusieurs variables, par exemple la formule [2])

$$(2) \qquad \iint_{(A)} f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\,\Omega$$

où Ω est l'aire du domaine d'intégration (A) et (ξ,η) sont les coordonnées d'un point intérieur.

Supposons que ξ et η sont les coordonnées du centre de gravité G de l'aire (A) et considérons l'équation fonctionnelle

$$(3) \qquad \iint_{(A)} f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi_G,\eta_G)\,\Omega$$

qui généralise l'équation de M. Pompeiu.

---

1. D. Pompeiu. Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne. C. R. de l'Académie des Sciences de Paris. Tome 190, 1930, p. 1107.
2. E. Goursat. Cours d'analyse mathématique. Tome I, 1933, p. 291.

Nous nous occuperons de cette équation dans les cas suivants :

I. (A) représente l'aire d'un triangle dont les sommets sont arbitraires.

II (A) représente l'aire d'un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux axes coordonnées et dont les sommets sont arbitraires.

Evidemment on peut faire encore d'autres hypothèses sur les aires (A).

Quelle que soit l'aire (A), l'équation (3) admet une solution fonction linéaire de x et de y. Mais l'équation (3) peut avoir d'autres solutions que la fonction linéaire. Nous montrerons cela en intégrant l'équation (3) dans les deux cas I et II.

2. *Intégration de l'équation* (3) *dans le premier cas.*

Considérons un triangle quelconque ABC et désignons par A',B',C' les milieux des côtés BC,CA,AB et par G, G_1, G_2, G_3 les centres de gravité des triangles ABC, AB'C', BC'A', CA'B'.

En ajoutant membre à membre les équations (3) relatives aux aires AB'C', BC'A', CA'B', A'B'C' et en comparant le résultat avec l'équation (3) relative à l'aire ABC, on voit que la fonction $f(x,y)$ doit être solution de l'équation fonctionnelle

$$f(\xi_{G_1}, \eta_{G_1}) + f(\xi_{G_2}, \eta_{G_2}) + f(\xi_{G_3}, \eta_{G_3}) = 3\, f(\xi_G, \eta_G)$$

ou bien avec d'autres notations de l'équation fonctionnelle

$$(4) \qquad f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3) = 3\, f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

On démontre sans peine que l'intégrale de cette équation est une fonction linéaire de x et y et par suite l'équation fonctionnelle (3), dans le cas où (A) représente l'aire d'un triangle dont les sommets sont quelconques, a pour intégrale une fonction linéaire de x et de y.

3. *Intégration de l'équation* (3) *dans le second cas* [1].

On démontre par un procédé analogue au précédent que la fonction $f(x,y)$ doit être solution de l'équation fonctionnelle

$$(5) \qquad f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2) = 4\, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

---

1. Au cours de l'impression de cette note nous avons appris que M. T. Popoviciu a considéré avant nous l'équation de M. Pompeiu dans le cas II, dans le Mémoire „Sur certaines équations fonctionnelles définissant des polynomes" Mathematica, Tome 10, 1935, p. 194. Nous ajoutons que notre méthode d'intégration de l'équation (5), diffère de la méthode de M. Popoviciu.

L'intégration de cette équation se fait de la façon suivante : on fait d'abord dans l'équation (5) $y_1=y_2=y$, et ensuite $x_1=x_2=x$. On obtient les équations

$$f(x_1, y)+f(x_2, y) = 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, y\right)$$

$$f(x, y_1)+f(x, y_2) = 2f\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

et si l'on regarde x et y comme des paramètres, on a des équations fonctionnelles à une seule variable étudiées par M. Pompeiu [1]).

L'intégrale de la première de ces équations est

$$f(x, y)=A(y)x+B(y)$$

et celle de la seconde équation est

$$f(x, y)=A_1(x)\,y+B_1(x).$$

En identifiant les seconds membres de ces formules on démontre que les fonctions $A(y)$, $B(y)$, $A_1(x)$, $B_1(x)$ sont des polynomes du premier degré et par suite l'intégrale de l'équation (5) est

$$f(x, y)=kxy+\alpha x+\beta y+\gamma, \tag{6}$$

où k, α, β, γ sont des constantes.

Nous voyons donc que l'intégrale de l'équation fonctionnelle (3), dans le cas où (A) représente l'aire d'un parallélogramme quelconque dont les côtés sont parallèles aux axes coordonnées, est donnée par la formule (6).

4. *Intégration d'une autre équation fonctionnelle.* Considérons la formule classique [2]).

$$\frac{g(x_1, y_1)-g(x_1, y_2)-g(x_2, y_1)+g(x_2, y_2)}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} = g''_{xy}(\xi, \eta) \tag{7}$$

où

$$x_1<\xi<x_2,\quad y_1<\eta<y_2$$

et déterminons la fonction $g(x, y)$ pour laquelle

$$\xi=\frac{x_1+x_2}{2},\quad \eta=\frac{y_1+y_2}{2}$$

quels que soient x_1, x_2, y_1, y_2.

---

1. D. Pompeiu. Sur une propriété intégrale caractéristique des fonctions linéaires. Bull. de Math. et de Physique de l'Ec. Polyt. de Bucarest Tome II, 1930, p. 3.

2. E. Goursat. Cours d'analyse mathématique. Tome I, 1933, p. 43.

L'équation (7) peut s'écrire

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} g''_{xy}(x, y)\ dx\,dy = (x_2 - x_1)\,(y_2 - y_1)\ g''_{xy}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

et en posant

$$g''_{xy}(x, y) = f(x, y)$$

on a l'équation fonctionnelle

$$\int_{y_1}^{x_2}\int_{x_1}^{y_2} f(x, y)\ dx\,dy = (x_2 - x_1)\ (y_2 - y_1)\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

qui a été intégrée au No. précédent.

On a trouvé

$$f(x,y) = kxy + \alpha x + \beta y + \gamma,$$

et par suite l'intégrale générale de l'équation fonctionnelle (7) est

$$g(x, y) = \frac{k}{4}\,x^2 y^2 + \frac{\alpha}{2}\,x^2 y + \frac{\beta}{2}\,xy^2 + \gamma xy + \varphi(x) + \psi(y),$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont des fonctions arbitraires.

5. Tous ces résultats peuvent s'étendre à des fonctions de plusieurs variables.

---

109. GÉNÉRALISATION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DE M. D. POMPEIU (SUITE [1])

Par D. V. IONESCO, Mt. A. S. R.

(*Séance du 4 mars, 1938*)

6. Considérons l'équation fonctionnelle

$$(1)\qquad \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy = f\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\varphi(x,y)\,dx\,dy$$

qui généralise l'équation fonctionnelle de M. Pompeiu [2])

---

1. D. V. Ionesco. Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Roumanie. (Séance du 20 décembre 1937).

2. D. Pompeiu. Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne. C. R. de l'Académie des Sciences de Paris. Tome 190, 1930, p. 1107.