BULETINUL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE DIN CLUJ (ROMÂNIA
BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE CLUJ (ROUMANIE)
Tome IX, pag. 299—306.
20 juin 1939.

GÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ MÉCANIQUE DE LA CHAÎNETTE

par

D. V. Ionesco
Professeur à l'Université de Cluj.

Reçue le 19 octobre 1938.

Considérons la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

On sait que le centre de gravité d'un arc quelconque AB a la même abscisse que le point de concours des tangentes aux extrémités A et B (¹).

Dans ce travail nous allons démontrer d'abord que cette propriété est caractéristique pour la chaînette et nous allons donner ensuite une généralisation en considérant des courbes matérielles non homogènes.

1. Nous allons résoudre le problème suivant:

Déterminer une courbe représentée par l'équation

$$y = f(x)$$

de façon que le centre de gravité d'un arc quelconque AB *de la courbe, ait la même abscisse que le point de concours des tangentes aux extrémités de l'arc* AB.

Désignons par x_1 et x_2 les abscisses des points A, B. Les équations des tangentes en A et B étant

$$Y - f(x_1) = f'(x_1)(X - x_1)$$
$$Y - f(x_2) = f'(x_2)(X - x_2),$$

l'abscisse du point de concours T de ces tangentes est

$$X = \frac{[x_1 f'(x_1) - f(x_1)] - [x_2 f'(x_2) - f(x_2)]}{f'(x_1) - f'(x_2)}. \tag{1}$$

(¹) P. APPELL. Traité de Mécanique Rationnelle. Tome premier 5e édition p. 170.

D'autre part, l'abscisse du centre de gravité de l'arc AB est

$$(2) \qquad \xi = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$$

En égalant les seconds membres des formules (1) et (2), nous avons l'équation fonctionnelle du problème

$$(3) \qquad \{[x_1 f'(x_1)-f(x_1)]-[x_2 f'(x_2)-f(x_2)]\}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$
$$= [f'(x_1)-f'(x_2)]\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\,.$$

Pour intégrer cette équation nous allons dériver deux fois de suite, d'abord par rapport à x_2 et ensuite par rapport à x_1. Nous obtenons l'équation

$$(x_1-x_2)f''(x_1)\sqrt{1+f'^2(x_2)} = (x_1-x_2)f''(x_2)\sqrt{1+f'^2(x_2)}$$

qui doit être vérifiée quelles que soient les valeurs de x_1 et x_2.

Nous déduisons que

$$(4) \qquad \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}} = \frac{1}{a}$$

a étant une constante.

L'intégrale générale de l'équation (4) est

$$f(x) = \frac{a}{2}\left(Ae^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{A}e^{-\frac{x}{a}}\right) + B$$

où A et B sont deux constantes arbitraires.

En posant

$$A = e^{-\frac{x_0}{a}}, \quad B = y_0, \quad f(x) = y$$

nous avons

$$y - y_0 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right)$$

et par suite *la chaînette* est la seule solution de notre problème.

2. Nous allons généraliser maintenant le problème précédent

en cherchant une courbe représentée par l'équation

$$y = f(x)$$

telle que le centre de gravité d'un arc AB *quelconque de la courbe supposé non homogène, la densité en chaque point étant une fonction donnée* $\rho(x, y, y')$ *de la position du point et de l'inclinaison de la tangente, ait la même abscisse que le point de concours des tangentes aux extrémités de l'arc* AB.

En reprenant les calculs précédents, l'équation fonctionnelle du problème est

$$(5) \quad \{[x_1 f'(x_1) - f(x_1)] - [x_2 f'(x_2) - f(x_2)]\} \int_{x_1}^{x_2} \rho \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$
$$- [f'(x_1) - f'(x_2)] \int_{x_1}^{x_2} \rho\, x \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = 0 .$$

En dérivant cette éqution d'abord par rapport à x_2 et ensuite par rapport à x_1, on est conduit à l'équation différentielle

$$(6) \qquad \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{a}\, \rho(x, y, y')$$

où a est une constante.

Il est facile de voir que dans les cas où ρ est une fonction seulement de x, ou de y, ou de y', l'intégration de cette équation différentielle se ramène à des quadratures.

Nous allons étudier quelques propriétés de la courbe $y = f(x)$ dans le cas où ρ est une fonction seulement de x, et donner quelques exemples dans le cas où ρ est une fonction de y ou de y'.

3. Supposons que ρ soit une fonction de x. En intégrant l'équation

$$(7) \qquad \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\rho(x)}{a}$$

on obtient

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = \mathrm{A} e^{\frac{1}{a}\int_\alpha^x \rho(x)\, dx}$$

où A est une constante arbitraire.

On déduit que

$$y' = \frac{\mathrm{A}}{2} e^{\frac{1}{a}\int_\alpha^x \rho(x) dx} - \frac{1}{2\mathrm{A}} e^{-\frac{1}{a}\int_\alpha^x \rho(x) dx} ,$$

En intégrant encore une fois, on obtient

$$y=\int_{x_0}^{x}\left[\frac{A}{2}e^{\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{x}\rho(x)\,dx}-\frac{1}{2A}e^{-\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{x}\rho(x)\,dx}\right]dx+B\,.$$

En posant

$$A=e^{-\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{x_0}\rho(x)\,dx}\,,\quad B=y_0$$

l'équation de la courbe intégrale est

$$y-y_0=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left[e^{\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\rho(x)\,dx}-e^{-\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\rho(x)\,dx}\right]dx\,.$$

Cette courbe généralise la chaînette au point de vue de la propriété du centre de gravité que nous avons énoncé au début de ce travail. Mais elle généralise la chaînette aussi à un autre point de vue.

Transportons l'origine des axes au point de coordonnées (x_0, y_0) et désignons ensuite par M_0 et M les points dont les abscisses sont 0 et x. Calculons la masse de l'arc M_0M.

Nous avons

$$dM=\rho\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

mais

$$y'=\frac{1}{2}\left[e^{\frac{1}{a}\int_{0}^{x}\rho(x)\,dx}-e^{-\frac{1}{a}\int_{0}^{x}\rho(x)\,dx}\right]$$

de sorte que

$$dM=\frac{1}{2}\left[e^{\frac{1}{a}\int_{0}^{x}\rho(x)\,dx}+e^{-\frac{1}{a}\int_{0}^{x}\rho(x)\,dx}\right]\rho(x)dx\,.$$

En intégrant on obtient

$$M=\frac{a}{2}\left[e^{\frac{1}{a}\int_{0}^{x}\rho(x)\,dx}-e^{-\frac{1}{a}\int_{0}^{x}\rho(x)\,dx}\right]$$

ou bien

$$M=ay'$$

Pour donner une interprétation de la constante a prenons sur la tangente en M a la courbe dirigée dans le sens de l'arc MM_0, le segment

$$MP = \frac{\text{masse de l'arc } M_0M}{\text{densité en } M_0}$$

et par le point P menons une perpendiculaire à MP qui rencontre la perpendiculaire menée par M sur Ox, en P_1. La longueur de PP_1 est

$$\boxed{PP_1 = \frac{a}{\rho_0}} \tag{9}$$

Cette formule montre une propriété géométrique de la courbe représentée par l'équation (8) et donne en même temps une interprétation de la constante a.

En effet désignons par λ l'angle que fait la tangente PM avec Ox. Nous avons

$$PP_1 = MP \operatorname{cotg} \lambda = \frac{ay'}{\rho_0 y'} = \frac{a}{\rho_0} .$$

Nous pouvons donner aussi une construction simple du rayon de courbure en M qui est donné par la formule ,

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} .$$

Tenant compte de l'équation différentielle (7) de la courbe nous avons

$$\frac{1}{R} = \frac{\rho}{a} \cos^2 \lambda .$$

Mais si nous désignons par P_2 l'intersection de la normale en M à la courbe avec la parallèle à Ox menée par P_1, nous avons

$$MP_2 = \frac{MP_1}{\cos \lambda} = \frac{PP_1}{\cos^2 \lambda} = \frac{a}{\rho_0 \cos^2 \lambda}$$

de sorte que

$$\boxed{R = \frac{\rho_0}{\rho} MP_2} \tag{10}$$

De cette formule il résulte une construction simple du rayon de courbure.

Les formules (9) et (10) contiennent dans le cas particulier $\rho =$ const., des propriétés classiques de la chaînette.

4. Donnons maintenant quelques exemples dans le cas où la densité ρ est fonction de y ou de y'.

1°. Les fonctions

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\cos\sqrt{2}\,x}\,, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sh}\sqrt{2}\,x} \tag{11}$$

étant des intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = 2y\,,$$

il résulte que le centre de gravité d'un arc quelconque AB des courbes représentées par les équations (11), supposées non homogènes, la densité en chaque point étant proportionnelle à y, a même abscisse que le point de concours des tangentes en A et B.

2°. La fonction

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \tag{12}$$

étant une intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{R}{y^2}$$

il résulte que le centre de gravité d'un arc quelconque AB du cercle représenté par l'équation (12), supposé non homogène, la densité en chaque point étant proportionnelle à $\frac{1}{y^2}$, a la même abscisse que le point de concours des tangentes en A et B.

3°. La courbe

$$\begin{aligned} x &= R(\theta - \sin\theta) \\ y &= R(1-\cos\theta) \end{aligned} \tag{13}$$

étant une courbe intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = -\sqrt{\frac{R}{2}}\,y^{-\frac{3}{2}}$$

il résulte que le centre de gravité d'un arc quelconque de la cycloïde représentée par les équations (13), supposée non homogène la densité en chaque point étant proportionnelle à $y^{-\frac{3}{2}}$, a la même abscisse que le point de concours des tangentes en A et B.

4°. La courbe (13) étant aussi une intégrale de l'équation différentielle

$$y'' = -\frac{1}{4R}(1+y'^2)^2$$

que nous pouvons écrire sous la la forme

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{1}{4R}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

il résulte que le centre de gravité d'un arc quelconque AB de la cycloïde (13), supposé non homogène la densité en chaque point étant proportionnelle à $\frac{1}{\cos^3 u}$, où u est l'angle de la tangente avec Ox, a la même abscisse que le point de concours des tangentes en A et B.

5⁰. La fonction

$$y = \frac{a}{2}x^2 \tag{14}$$

étant une intégrale de l'équation différentielle

$$y'' = a,$$

il résulte que le centre de gravité d'un arc quelconque AB de la parabole (14), supposée non homogène, la densité en chaque point étant proportionnelle à $\cos u$, où u est l'angle de la tangente avec Ox, a la même abscisse que le point de concours des tangentes en A et B.

5. Pour finir nous allons montrer que la méthode d'intégration de l'équation fonctionnelle (5) peut être appliquée à une classe d'équations fonctionnelles plus générale.

Remarquons d'abord qu'on peut écrire l'équation fonctionnelle (5) sous la forme suivante

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\left[f(x_1)+\frac{x-x_1}{1}f'(x_1)\right]-\left[f(x_2)+\frac{x-x_2}{1}f'(x_2)\right]\right\}\rho(x,f,f')\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=0. \tag{15}$$

Posons pour abréger

$$f(x_1)=y_1$$
$$f^{(k)}(x_1)=y_1^{(k)}$$

et désignons par $\varphi(x, x_1, y_1, y_1', \dots, y^{(2n-1)})$ la somme

$$y_1+\frac{x-x_1}{1}y_1'+\cdots+\frac{(x-x_1)^{2n-1}}{(2n-1)!}y_1^{(2n-1)}$$

L'équation fonctionnelle

$$\int_{x_1}^{x_2}[\varphi(x,x_1,y_1,y_1',\dots,y_1^{(2n-1)})-\varphi(x,x_2,y_2,y_2',\dots,y_2^{(2n-1)})]\,\psi(x,y,y',\dots,y^{(m)})dx=0 \tag{16}$$

où $\psi(x, y, y_1', \dots, y^{(m)})$ est une fonction connue et $y(x)$ la fonction inconnue est une généralisation de l'équation fontionnelle (15).

Dérivons d'abord l'équation (16) par rapport à x_2. Nous obtenons

$$(17)\qquad [\varphi(x_2, x_1, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(2n-1)}) - y_2]\,\psi(x_2, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m)})$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}y_2' + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(2n-1)}}y_2^{(2n)}\right]\psi(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\,dx = 0.$$

Mais

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -y_2' - \frac{x-x_2}{1\,!}y_2'' - \cdots - \frac{(x-x_2)^{2n-2}}{(2n-2)!}y^{(2n-1)}$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}y_2' + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2^{(2n-1)}}y^{(2n)} = \frac{(x-x_2)^{2n-1}}{(2n-1)!}y_2^{(2n)}$$

de sorte que l'équation (17) devient

$$[\varphi(x_2, x_1, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(2n-1)}) - y_2]\,\psi(x_2, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m)})$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{(x-x_2)^{2n-1}}{(2n-1)!}y_2^{(2n)}\,\psi(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\,dx = 0\,.$$

Dérivons maintenant cette équation par rapport à x_1. Nous aurons

$$(18)\qquad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}y_2' + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1^{(2n-1)}}y_1^{(2n)}\right]\psi(x_2, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m)})$$

$$+\frac{(x_1-x_2)^{2n-1}}{(2n-1)!}y_2^{(2n)}\,\psi(x_1, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m)}) = 0\,.$$

Mais

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}y_1' + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1^{(2n-1)}}y_1^{(2n)} = \frac{(x_2-x_1)^{2n-1}}{(2n-1)!}y_1^{(2n)}\,.$$

L'équation (18) devient

$$\frac{(x_2-x_1)^{2n-1}}{(2n-1)!}y_1^{(2n)}\,\psi(x_2, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m)}) + \frac{(x_1-x_2)^{2n-1}}{(2n-1)!}y_2^{(2n)}\psi(x_1, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m)}) = 0$$

ou encore

$$\frac{y_1^{(2n)}}{\psi(x_1, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m)})} = \frac{y_2^{(2n)}}{\psi(x_2, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m)})}\,.$$

Cette équation devant être satisfaite quelles que soient les valeurs de x_1, x_2, il résulte que la valeur commune des deux membres de cette équation est une constante.

Nous avons donc

$$(19)\qquad \frac{y^{(2n)}}{\psi(x, y, y', \ldots y^{(m)})} = a$$

et l'intégration de l'équation fonctionnelle (16) est ramenée à l'intégration de l'équation différentielle (19).