

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE
L'ACADEMIE DES SCIENCES DE ROUMANIE

S O M M A I R E

I. SCIENCES MATHEMATIQUES

	Page
144. Sur la représentation conforme. Par <u>Alexandre Ghika</u> . Mc. A. S. R.	599
145. Une problème relatif à la seconde formule de la moyenne. Par <u>D. V. Joneșcu</u> , Mt. A. S. R.	603
146. Surfaces spirales archimédiennes. Par <u>Al. Myller</u> , Mt. A. S. R.	606
147. Suites de fonctions également continues. Par <u>Miron Nicolesco</u> , Mt. A. S. R.	608

II. SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

148. Sur les éléments du magnétisme terrestre en Transylvanie. Par <u>G. Atanasiu</u> , Mc. A. S. R.	610
149. Beziehung der üblichen photometrischen Einheiten zum Giorgi'schen MKS (O) Massystem. Von <u>E. Bodea</u> . Mitgeteilt von <u>E. Bădăru</u> , Mf. A. S. R.	612
150. L'échange d'énergie dans le choc électronique. Par <u>R. Grigorovici</u> . Présentée par <u>E. Bădăru</u> , Mf. A. S. R.	615
151. Sur une controverse entre MM. Aurel Ionescu et Ilie C. Purcaru au sujet des conclusions de M. Ilie C. Purcaru sur la nature oscillante des décharges électriques par étincelle. Par <u>Aurel Ionescu</u> , Mc. A. S. R.	620
152. Conséquences et possibilités d'ordre chimique et biochimique résultant de la combinaison de l'acide borique avec les substances organiques. Par <u>J. Voicu</u> , Mt. A. S. R.	624
153. Une méthode colorimétrique pour le dosage de petites et de très petites quantités de bore. Par <u>J. Voicu</u> , Mt. A. S. R. et <u>Virginia Voicu</u>	629

III. SCIENCES NATURELLES ET BIOLOGIE APPLIQUEE.

154. Beiträge zum Studium der branchialen Permeabilität bei <u>Cyprinus Carpio</u> ♂ unter dem Einfluss des elektrischen Gleichstromes. Von <u>A. Gradișeacu</u> , Mt. A. S. R. und <u>E. Pora</u>	632
155. Sur la présence des hormones surrénales chez les foetus et les nouveau-nés. I. L'hormone médullaire. Par <u>A. Gradișeacu</u> , Mt. A. S. R. et <u>N. Săntă</u>	638

Il résulte, que $\sqrt{g'(\xi)}$ appartient à l'ensemble $\Omega(\Gamma)$ et, par conséquent, que la fonction $g(\xi)$ est absolument continue le long de tout chemin rectifiable situé sur le domaine fermé Δ .

Il s'en suit, en particulier, que $g(\xi)$ est absolument continue le long de Γ .

Cette dernière propriété peut se déduire aussi très facilement des résultats de M. Lusin, cité plus haut.

En effet, la fonction $z=g(\zeta)$ (ζ étant situé sur Γ) définit la courbe rectifiable C et par conséquent elle est à variation bornée. Sa dérivée existe donc presque partout et est sommable le long de Γ .

On a

$$g(\zeta) = g(\zeta_0) + g_s(\zeta) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} g'(\zeta) d\zeta$$

$g_s(\zeta)$ étant la fonction de saut $g(\zeta)$.

A un ensemble E de C de mesure nulle correspondant un ensemble ε de Γ de mesure nulle, il résulte sans peine, que $g_s(\zeta) \equiv 0$ et par suite que $g(\zeta)$ est absolument continue.

145. UN PROBLÈME RELATIF À LA SECONDE FORMULE DE LA MOYENNE

Par D. V. JONESCO Mt. A. S. R.

(Séance du 14 janvier 1938)

Considérons la seconde formule de la moyenne¹⁾

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x) dx$$

où $a < \xi < b$, et déterminons les fonctions $f(x)$ et $\psi(x)$ pour lesquelles ξ occupe le milieu de l'intervalle (a, b) , quels que soient a et b , c'est-à-dire

$$(I) \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a) \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \varphi(b) \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx$$

1. E. Goursat, Cours d'analyse mathématique, Tome I, 1933, p. 180.

Nous allons intégrer cette équation en supposant la fonction $f(x)$ continue et que la fonction $\varphi(x)$ a une dérivée continue.

Posons

$$a=u-v, \quad b=u+v.$$

L'équation (1) devient

$$\int_{u-v}^{u+v} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(u-v) \int_{u-v}^u f(x) dx + \varphi(u+v) \int_u^{u+v} f(x) dx.$$

En dérivant les deux membres par rapport à v , nous déduisons l'équation

$$(2) \quad \varphi'(u-v) \int_{u-v}^u f(x) dx = \varphi'(u+v) \int_u^{u+v} f(x) dx.$$

En posant

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi'(x) &= \Phi(x) \\ f(x) &= F'(x), \end{aligned}$$

l'équation (2) devient

$$(4) \quad F(u-v) \Phi(u-v) + F(u+v) \Phi(u+v) = F(u) [\Phi(u-v) + \Phi(u+v)]$$

Cette équation fonctionnelle a été signalée par M. P o m p e i ¹⁾ qui a indiqué des solutions particulières. Sa résolution a été faite par M. Th. A n g h e l u t z a ²⁾ qui a donné les solutions suivantes

$$\Phi(x) = \lambda x + \mu, \quad F(x) = \frac{\lambda' x + \mu'}{\lambda x + \mu}$$

$$\Phi(x) = \lambda \cos \theta x + \mu \sin \theta x, \quad F(x) = \frac{\lambda' \cos \theta x + \mu' \sin \theta x}{\lambda \cos \theta x + \mu \sin \theta x}$$

$$\Phi(x) = \lambda \operatorname{ch} \theta x + \mu \operatorname{sh} \theta x, \quad F(x) = \frac{\lambda' \operatorname{ch} \theta x + \mu' \operatorname{sh} \theta x}{\lambda \operatorname{ch} \theta x + \mu \operatorname{sh} \theta x}$$

où $\lambda, \mu, \lambda', \mu', \theta$ sont les constantes.

1. D. P o m p e i. Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne. C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 190, 1930, p. 1107.

2. T h. A n g h e l u t z a. Sur une équation fonctionnelle. C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 194, 1932, p. 420.

Les fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont données par les équations (3) et nous avons

$$\varphi(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \quad , \quad f(x) = \frac{1}{(\alpha x + \beta)^2}$$

$$\varphi(x) = \alpha \cos \theta x + \beta \sin \theta x + \gamma \quad , \quad f(x) = \frac{1}{(\alpha \sin \theta x - \beta \cos \theta x)^2}$$

$$\varphi(x) = \alpha \operatorname{ch} \theta x + \beta \operatorname{sh} \theta x + \gamma \quad , \quad f(x) = \frac{1}{(\alpha \operatorname{sh} \theta x + \beta \operatorname{ch} \theta x)^2}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ sont des constantes.

A ces trois solutions correspondent les identités suivantes

$$\int_a^b \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(\alpha x + \beta)^2} dx = (\alpha a^2 + 2\beta a + \gamma) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2} +$$

$$+ (\alpha b^2 + 2\beta b + \gamma) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2}$$

$$\int_a^b \frac{\alpha \cos \theta x + \beta \sin \theta x + \gamma}{(\alpha \sin \theta x - \beta \cos \theta x)^2} dx = (\alpha \cos \theta a + \beta \sin \theta a + \gamma) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{(\alpha \sin \theta x - \beta \cos \theta x)^2} +$$

$$+ (\alpha \cos \theta b + \beta \sin \theta b + \gamma) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{dx}{(\alpha \sin \theta x - \beta \cos \theta x)^2}$$

$$\int_a^b \frac{\alpha \operatorname{ch} \theta x + \beta \operatorname{sh} \theta x + \gamma}{(\alpha \operatorname{sh} \theta x + \beta \operatorname{ch} \theta x)^2} dx = (\alpha \operatorname{ch} \theta a + \beta \operatorname{sh} \theta a + \gamma) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{(\alpha \operatorname{sh} \theta x + \beta \operatorname{ch} \theta x)^2} +$$

$$+ (\alpha \operatorname{ch} \theta b + \beta \operatorname{sh} \theta b + \gamma) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{dx}{(\alpha \operatorname{sh} \theta x + \beta \operatorname{ch} \theta x)^2}$$

On a choisi les constantes α, β, θ , de façon que toutes ces intégrales aient un sens.

Les valeurs de ces trois intégrales sont

$$\frac{(b-a)}{(b-a)} \frac{\alpha ab + \beta(a+b) + \gamma}{(\alpha a + b)(\alpha b + \beta)},$$
$$\frac{2 \sin \frac{b-a}{2} \theta}{\theta} \frac{\alpha \cos \frac{a+b}{2} \theta + \beta \sin \frac{a+b}{2} \theta + \gamma \cos \frac{a-b}{2} \theta}{(\alpha \sin \theta a - \beta \cos \theta a)(\alpha \sin \theta b - \beta \cos \theta b)},$$
$$\frac{2 \operatorname{sh} \frac{b-a}{2} \theta}{\theta} \frac{\alpha \operatorname{ch} \frac{a+b}{2} \theta + \beta \operatorname{sh} \frac{a+b}{2} \theta + \gamma \operatorname{ch} \frac{a-b}{2} \theta}{(\alpha \operatorname{sh} \theta a + \beta \operatorname{ch} \theta a)(\alpha \operatorname{sh} \theta b + \beta \operatorname{ch} \theta b)}.$$

146. SURFACES SPIRALES ARCHIMÉDIENNES

Par A. MYLLER, Mt. A. S. R.

(Séance du 28 mai 1938)

On connaît les surfaces spirales caractérisées par la propriété, qui les rapproche de la spirale logarithmique, d'être congruentes aux surfaces qui leur sont semblables. Dans ce qui suit, nous indiquons des surfaces caractérisées par la propriété, qui les rapproche de la spirale d'Archimède, d'être congruentes à leur conchoïdes.

Dans le système de coordonnées sphériques ρ, θ, ω , où θ représente la latitude et ω la longitude, nous considérons la surface

$$(1) \quad \rho = f(\theta) + m\omega, \quad (m = \text{const.})$$

f étant une fonction arbitraire. Tournons-la autour de l'axe oz ($\theta = \pi/2$) d'un angle ω_0 . L'équation de la surface ainsi tournée est

$$\rho = f(\theta) + m\omega + m\omega_0.$$

Mais cette équation représente aussi la conchoïde de la surface (1), obtenue en ajoutant aux rayons vecteurs de la surface (1) le segment de longueur constante $m\omega_0$.

On voit que les courbes de profil, c'est-à-dire les sections par des plans par oz , sont des courbes conchoïdes entre elles.