Tome II 1938 Numéro 6

COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE ROUMANIE

SOMMAIRE

I. SCIENCES MATHEMATIQUES

II. SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

III. SCIENCES NATURELLES ET BIOLOGIE APPLIQUEE.

Il résulte, que $\sqrt{g'(\xi)}$ appartient à l'ensemble $\Omega(\Gamma)$ et, par conséquent, que *la fonction $g(\xi)$ est absolument continue le long de tout chemin rectifiable situé sur le domaine fermé Δ.*

Il s'en suit, en particulier, que $g(\xi)$ est absolument continue le long de Γ.

Cette dernière propriété peut se déduire aussi très facilement des résultats de M. L u s i n, cité plus haut.

En effet, la fonction $z=g(\zeta)$ (ζ étant situé sur Γ) définit la courbe rectifiable C et par conséquent elle est à variation bornée. Sa dérivée existe donc presque partout et est sommable le long de Γ.

On a

$$g(\zeta)=g(\zeta_o)+g_s(\zeta)+\int_{\zeta_0}^{\zeta} g'(\zeta)\,d\zeta$$

$g_s(\zeta)$ étant la fonction de saut $g(\zeta)$.

A un ensemble E de C de mesure nulle correspondant un ensemble ε de Γ de mesure nulle, il résulte sans peine, que $g_s(\zeta)\equiv o$ et par suite que $g(\zeta)$ est absolument continue.

---

145. UN PROBLÈME RELATIF À LA SECONDE FORMULE DE LA MOYENNE

Par D. V. JONESCO Mt. A. S. R.

(*Séance du 14 janvier 1938*)

Considérons la seconde formule de la moyenne [1])

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx+\varphi(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx$$

où $a<\xi<b$, et déterminons les fonctions $f(x)$ et $\psi(x)$ pour lesquelles ξ occupe le milieu de l'intervalle (a,b), quels que soient a et b, c'est-à-dire

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx+\varphi(b)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx \tag{1}$$

1. E. G o u r s a t, Cours d'analyse mathématique, Tome I, 1933, p. 180.

Nous allons intégrer cette équation en supposant la fonction $f(x)$ continue et que la fonction $\varphi(x)$ a une dérivée continue.

Posons

$$a=u-v \quad , \quad b=u+v.$$

L'équation (1) devient

$$\int_{u-v}^{u+v} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(u-v)\int_{u-v}^{u} f(x)\,dx + \varphi(u+v)\int_{u}^{u+v} f(x)\,dx.$$

En dérivant les deux membres par rapport à v, nous déduisons l'équation

$$\varphi'(u-v)\int_{u-v}^{u} f(x)\,dx = \varphi'(u+v)\int_{u}^{u+v} f(x)\,dx. \tag{2}$$

En posant

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \Phi(x) \\ f(x) &= F'(x), \end{aligned} \tag{3}$$

l'équation (2) devient

$$F(u-v)\,\Phi(u-v)+F(u+v)\,\Phi(u+v)=F(u)\,[\,\Phi(u-v)+\Phi(u+v)] \tag{4}$$

Cette équation fonctionnelle a été signalée par M. Pompeiu [1]) qui a indiqué des solutions particulières. Sa résolution a été faite par M. Th. Anghelutza [2]) qui a donné les solutions suivantes

$$\Phi(x)=\lambda\,x+\mu \quad , \quad F(x)=\frac{\lambda' x+\mu'}{\lambda x+\mu}$$

$$\Phi(x)=\lambda\cos\theta x+\mu\sin\theta x, \quad F(x)=\frac{\lambda'\cos\theta x+\mu'\sin\theta x}{\lambda\cos\theta x+\mu\sin\theta x}$$

$$\Phi(x)=\lambda\,ch\,\theta\,x+\mu\,sh\,\theta\,x, \quad F(x)=\frac{\lambda'\,ch\,\theta\,x+\mu'\,sh\,\theta\,x}{\lambda\,ch\,\theta\,x+\mu\,sh\,\theta\,x}$$

où $\lambda, \mu, \lambda', \mu', \theta$ sont les constantes.

---

1. D. Pompeiu. Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne. C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 190, 1930, p. 1107.

2. Th. Anghelutza. Sur une équation fonctionnelle. C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 194, 1932, p. 420.

Les fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont données par les équations (3) et nous avons

$$\varphi(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \qquad , \quad f(x) = \frac{1}{(\alpha x + \beta)^2}$$

$$\varphi(x) = \alpha \cos \theta x + \beta \sin \theta x + \gamma \ , \quad f(x) = \frac{1}{(\alpha \sin \theta x - \beta \cos \theta x)^2}$$

$$\varphi(x) = \alpha \, ch\, \theta x + \beta \, sh\, \theta x + \gamma \ , \quad f(x) = \frac{1}{(\alpha \, sh\, \theta x + \beta \, ch\, \theta x)^2}$$

où α, β, γ, θ sont des constantes.

A ces trois solutions correspondent les identités suivantes

$$\int_a^b \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(\alpha x + \beta)^2} dx = (\alpha a^2 + 2\beta a + \gamma) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2} + $$
$$+ (\alpha b^2 + 2\beta b + \gamma) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2}$$

$$\int_a^b \frac{\alpha \cos \theta x + \beta \sin \theta x + \gamma}{(\alpha \sin \theta x - \beta \cos \theta x)^2} dx = (\alpha \cos \theta a + \beta \sin \theta a + \gamma) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{(\alpha \sin \theta x - \beta \cos \theta x)^2} +$$
$$+ (\alpha \cos \theta b + \beta \sin \theta b + \gamma) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{dx}{(\alpha \sin \theta x - \beta \cos \theta x)^2}$$

$$\int_a^b \frac{\alpha \, ch\, \theta x + \beta \, sh\, \theta x + \gamma}{(\alpha \, sh\, \theta x + \beta \, ch\, \theta x)^2} dx = (\alpha \, ch\, \theta a + \beta \, sh\, \theta a + \gamma) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{(\alpha \, sh\, \theta x + \beta \, ch\, \theta x)^2} +$$
$$+ (\alpha \, ch\, \theta b + \beta \, sh\, \theta b + \gamma) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{dx}{(\alpha \, sh\, \theta x + \beta \, ch\, \theta x)^2}$$

On a choisi les constantes α, β, θ, de façon que toutes ces intégrales aient un sens.

Les valeurs de ces trois intégrales sont

$$(b-a)\frac{\alpha a b+\beta(a+b)+\gamma}{(\alpha a+b)\ (\alpha b+\beta)},$$

$$\frac{2\sin\frac{b-a}{2}\theta}{\theta}\cdot\frac{\alpha\cos\frac{a+b}{2}\theta+\beta\sin\frac{a+b}{2}\theta+\gamma\cos\frac{a-b}{2}\theta}{(\alpha\sin\theta\, a-\beta\cos\theta\, a)\,(\alpha\sin\theta\, b-\beta\cos\theta\, b)},$$

$$\frac{2\,sh\frac{b-a}{2}\theta}{\theta}\cdot\frac{\alpha\, ch\frac{a+b}{2}\theta+\beta\, sh\frac{a+b}{2}\theta+\gamma\, ch\frac{a-b}{2}\theta}{(\alpha\, sh\,\theta\, a+\beta\, ch\,\theta\, a)\,(\alpha\, sh\,\theta\, b+\beta\, ch\,\theta\, b)}.$$

---

146. SURFACES SPIRALES ARCHIMÉDIENNES

Par A. MYLLER, Mt. A. S. R.

(*Séance du 28 mai 1938*)

On connaît les surfaces spirales caractérisées par la propriété, qui les rapproche de la spirale logarithmique, d'être congruentes aux surfaces qui leur sont semblables. Dans ce qui suit, nous indiquons des surfaces caractérisées par la propriété, qui les rapproche de la spirale d'*Archimède*, d'être congruentes à leur conchoïdes.

Dans le système de coordonnées sphériques ρ, θ, ω, où θ représente la latitude et ω la longitude, nous considérons la surface

$$\rho=f(\theta)+m\omega, \qquad (m=\text{const.}) \tag{1}$$

f étant une fonction arbitraire. Tournons-la autour de l'axe oz $(\theta=\pi/2)$ d'un angle ω_0. L'équation de la surface ainsi tournée est

$$\rho=f(\theta)+m\omega+m\omega_0.$$

Mais cette équation représente aussi la conchoïde de la surface (1), obtenue en ajoutant aux rayons vecteurs de la surface (1) le segment de longueur constante $m\omega_0$.

On voit que les courbes de profil, c'est-à-dire les sections par des plans par oz, sont des courbes conchoïdes entre elles.