X. 11

ACADÉMIE ROUMAINE

BULLETIN
DE LA SECTION SCIENTIFIQUE

PUBLIÉ PAR LE SECRÉTAIRE DE LA SECTION

GR. ANTIPA
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

TOME XX-ème
No. 7

SOMMAIRE

MONITORUL OFICIAL
ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ

DEPOZITUL GENERAL
CARTEA ROMÂNEASCĂ
B-DUL ACADEMIEI, 3—5

BUCUREȘTI
1938

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Note présentée par M. G. Tzitzéica, M. A. R.

1. — Dans un travail antérieur[1], j'ai démontré que toute fonction $f(x)$ continue dans un intervalle fini et fermé (a, b) est la limite d'une suite uniformément convergente de polynomes qui conservent toutes les propriétés de convexité de $f(x)$. Cette propriété est réalisée par les polynomes de M. *S. Bernstein*.

$$(1) \qquad P_m(x) = \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f\left(a + i\frac{b-a}{m}\right)(x-a)^i\,(b-x)^{m-i}.$$

Mais, en général, on ne peut rien dire sur les caractères de convexité des polynomes (1), *en dehors de l'intervalle* (a, b). Dans la suite nous démontrerons la propriété suivante:

Toute fonction continue et non-concave d'ordre n dans l'intervalle (a, b) *est limite d'une suite uniformément convergente dans cet intervalle de polynomes qui sont convexes d'ordre n partout, donc dans* $(-\infty, +\infty)$.

Nous supposons, bien entendu, que $f(x)$ ne se réduise pas à un polynome de degré n.

2. — Si nous disons qu'une fonction non-négative est non-concave d'ordre -1, la propriété précédente est vraie aussi pour $n = -1$. En effet, il existe dans ce cas une fonction continue $g(x)$ telle que l'on ait $f(x) = g^2(x)$ dans (a, b). Soit alors $M = \max\limits_{(a,\,b)} |g(x)|$ et ε un nombre positif. D'après le théorème de *Weierstrass* pour tout $0 < \varepsilon' < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2M+1}\right)$ il existe un polynome $P(x)$ tel que $|g - P| < \varepsilon'$ dans (a, b). Nous avons

$$|P| < M + 1, \quad |g + P| < 2M + 1 \text{ dans } (a, b),$$

[1] Voir: Tiberiu Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, « Mathematica », t. X (1935), pp. 49—54.

donc $\quad |f - P^2| = |g^2 - P^2| = |g - P|\,|g + P| < \varepsilon'(2M + 1) < \varepsilon,$

dans (a, b), ce qui démontre la propriété.

Nous pouvons maintenant démontrer la propriété pour n quelconque. Supposons donc que $f(x)$ soit non-concave d'ordre n dans (a, b) et soit ε un nombre positif quelconque. On peut déterminer un m tel que l'on ait

$$(2) \qquad |f - P_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{dans } (a, b),$$

P_m étant le polynome (1), généralement de degré $> n$. Dans ce cas $P_m^{(n+1)} \geqq 0$ dans (a, b), il existe donc un polynome partout non-négatif $P(x)$ tel que l'on ait

$$|P_m^{(n+1)} - P| < \frac{\varepsilon\,(n+1)!}{2\,(b-a)^{n+1}}, \quad \text{dans } (a, b).$$

Le polynome

$$Q(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, P(t)\, dt + \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^i}{i!}\, P_m^{(i)}(a)$$

est convexe d'ordre n $(-\infty, +\infty)$ et nous avons

$$P_m(x) - Q(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,[P_m^{(n+1)}(t) - P(t)]\, dt,$$

d'où

$$(3) \qquad |P_m - Q| < \frac{\varepsilon\,(n+1)!}{2\,(b-a)^{n+1}} \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ dans } (a, b).$$

De (2) et (3) on déduit que

$$|f - Q| \leqq |f - P_m| + |P_m - Q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ dans } (a, b)$$

ce qui démontre la propriété.

3. Nous allons donner une autre démonstration pour $n = 1$, en nous servant directement des polynomes de M. S. *Bernstein*. Divisons l'intervalle (a, b) en r parties égales par les points

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{r}, \quad i = 0, 1, \ldots, r$$

et soit $L_r(x)$ la fonction représentée par la ligne polygonale de sommets $(x_i, f(x_i))$. On sait que $L_r(x) \to f(x)$ pour $r \to \infty$, uniformément dans (a, b). Si nous considérons les fonctions continues

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{dans } (a, x_i) \\ x - x_i, & \text{dans } (x_i, b) \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r - 1$$

nous pouvons écrire [2])

$$L_r(x) = f(a) + [a, x_1; f](x - a) + \sum_{i=0}^{r-2} (x_{i+2} - x_i)[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f]\, \varphi_{i+1}(x).$$

On voit maintenant qu'il suffit de démontrer la propriété pour les fonctions $\varphi_i(x)$. Prolongeons cette fonction dans l'intervalle

$$(x_i - b + a\ ,\ x_i + b - a)$$

par

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{dans } (x_i - b + a, x_i) \\ x - x_i, & \text{dans } (x_i, x_i + b - a) \end{cases}$$

et soit $P_{m,i}(x)$ le polynome de M. S. *Bernstein* de degré m de cette fonction dans l'intervalle $(x_i - b + a,\ x_i + b - a)$. On vérifie, par un calcul direct, que $P''_{m,i}(x) \geqq 0$ partout, donc $P_{m,i}$ est convexe (d'ordre 1) dans $(-\infty, +\infty)$ *si m est pair*. On voit maintenant que si ε est un nombre positif quelconque, si nous déterminons les entiers positifs r et s de manière que

$$|f - L_r| < \frac{\varepsilon}{2}\ ,\quad \text{dans } (a, b)$$

$$|\varphi_i - P_{2s,i}| < \frac{\varepsilon}{2(r-1)(x_{i+2} - x_i)[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f]}$$

dans $(x_i - b + a,\ x_i + b - a)$, $i = 1, 2 \ldots, r - 1$ [3]),

et si nous posons

$$Q(x) = f(a) + [a, x_1; f](x - a) + \sum_{i=0}^{r-2} (x_{i+2} - x_i)[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f]\, P_{2s,i+1}(x).$$

le polynome $Q(x)$ est partout convexe (d'ordre 1) et nous avons

$$|f - Q| < \varepsilon\ ,\quad \text{dans } (a, b)$$

4. — Remarquons que pour m pair les polynomes $P_{m,i}$ sont croissants dans l'intervalle $(x_i - b + a, +\infty)$. Nous avons donc aussi la propriété suivante:

---

[2]) Pour les notations, voir mes travaux antérieurs.

[3]) Si $[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f] = 0$, nous pouvons supprimer de nos considérations la fonction φ_i correspondante.

Toute fonction continue, non-décroissante et non-concave (d'ordre 1) dans l'intervalle (a, b) est la limite d'une suite uniformément convergente de polynomes qui sont croissants dans $(a, +\infty)$ et convexes (d'ordre 1) dans $(-\infty, +\infty)$.

Il est clair qu'on peut trouver des polynomes d'approximation tels qu'ils soient croissants dans l'intervalle $(c, +\infty)$, c étant un nombre $\leq a$ mais, il est évident, qu'on ne peut pas prendre $c = -\infty$. Une propriété analogue à lieu pour les fonctions continues non-croissantes et non-concaves. Dans ce cas les polynomes sont décroissants dans

$$(-\infty, d) \quad , \text{ où } d \geq b.$$

On peut aussi obtenir des suites de polynomes d'approximation indéfinie conservant à la fois plusieurs propriétés de convexité, partout ou dans des intervalles $(c + \infty)$, $(-\infty, d)$, mais nous n'insistons pas ici davantage sur ces questions.

Cernăuti, 27 Septembre 1938.