

6. Si $A(x)$ est la fonction définie en 5b, γ nous avons la propriété en question précisée.

Si φ est définie, non-dérivable et non-convexe (l'ordre 1) dans $(0,1)$, on a $A_\varphi(f) > A_\varphi(f)$.

La démonstration peut d'ailleurs se simplifier beaucoup dans ce cas.

Si φ est non-convexe (au sens d'être non-convexe) on a $A_\varphi(f) < A_\varphi(f)$. En particulier

Si φ est définie, continue, convexe et convexe dans $(0,1)$ et si $A_\varphi(f)$ est donné, le minimum de $A_\varphi(f)$ dans (E_n^b) , ne peut être atteint que pour une fonction élémentaire de degré n à au plus 1 sommet.

Si $n=1$ nous avons dans ce cas la propriété de la 5b. Si γ , avec le signe d'inégalité convexe $\geq$ dans la formule (6).

Résumons, en terminant, que l'hypothèse $g(x)=0, g'(x)=0$ n'est pas essentielle. Nous l'avons faite uniquement pour simplifier la démonstration.

113. SUR QUELQUES INÉGALITÉS ENTRE LES FONCTIONS CONVEXES

(DEUXIÈME NOTE)

Par TIBERIU POPOVICIU, Mc. A. S. R.

(Séance du 4 mars 1938)

1. Nous avons démontré dans la première Note que le maximum de $A_\varphi(f)$ dans (E_n^b) , lorsque $A(f)$ est donné, ne peut être atteint que par une fonction élémentaire de degré n à au plus 1 sommet. Plus exactement, il existe toujours une fonction élémentaire $h(x)$ de (E_n^b) , ayant au plus 1 sommet, telle que $A(h)=A(f)$, $A_\varphi(h) > A_\varphi(f)$, l'égalité n'étant possible si f n'est pas une fonction élémentaire à 0 ou 1 sommet.

En particulier, pour $n=1$, le problème de maximum est complètement résolu puisque la valeur de l'intégrale $A(f)$ détermine complètement la fonction h .

Nous nous proposons d'examiner maintenant le cas $n > 1$. Il faut alors, choisir parmi les fonctions élémentaires à 0 ou 1 sommet, celle (ou celles) qui donne le maximum de $A_\varphi(f)$.

Nous allons utiliser une propriété auxiliaire, que nous avons déjà employée dans la note précédente, et que nous énonçons maintenant sous la forme suivante :

Soit φ une fonction de la forme indiquée dans la première note. Soient ensuite f, f^* deux fonctions continues, dérivables et croissantes dans l'intervalle fermé $(0,1)$. De plus, les fonctions f, f^* vérifient les propriétés :

$$1^0. f(0)=f^*(0)=a \geq 0, f(1)=f^*(1)=b \leq 1, a \geq b.$$

$$2^0. On a $A(f^*)=A(f)$.$$

3⁰. Il existe un nombre $x_0, 0 < x_0 < 1$, tel qu'on ait $f^*(x) \leq f(x)$, suivant que $x \leq x_0, 0 < x < 1$.

Plus généralement nous pouvons supposer que f^* est d'abord constamment égale à a et ensuite est croissante.

On a alors l'inégalité $A_\varphi(f^*) > A_\varphi(f)$ ¹⁾.

La démonstration est simple. D'après la représentation de φ par une intégrale de Stieltjes, il suffit de démontrer la propriété pour les fonctions φ_λ . ²⁾ Ceci revient à démontrer que

$$G(\lambda) = \int_0^1 f^* dx - \int_0^1 f dx + \lambda (t^* - t) > 0, \quad a < \lambda < b,$$

où $\lambda = f(t) = f^*(t^*)$. Or, t, t^* et le premier membre de cette inégalité sont des fonctions dérivables de λ . Nous avons

$$\frac{dG}{d\lambda} = -f^*(t^*) \frac{dt^*}{d\lambda} + f(t) \frac{dt}{d\lambda} + \lambda \left(\frac{dt^*}{d\lambda} - \frac{dt}{d\lambda} \right) + (t^* - t) = t^* - t$$

La propriété résulte immédiatement du fait que $t^* \geq t$ suivant que $\lambda \leq f(x_0)$.

2. Considérons maintenant la fonction de (E_n^b) ,

$$h(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + (b - a - \sum_{i=1}^k a_i) \left[\frac{x - \mu + |x - \mu|}{2(1 - \mu)} \right]^n$$

où, $0 < \mu < 1, a_i \geq 0, i=1, 2, \dots, k-1, a_k > 0, k \leq n-1, b - a - \sum_{i=1}^k a_i > 0$.

1. Ce n'est qu'un cas particulier d'une inégalité qui, pour le cas fini a été donné par MM. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, voir : „Some simple inequalities satisfied by convex functions” Messenger of math. 58 (1929) p. 145—152. Voir aussi J. Karamata „Sur une inégalité relative aux fonctions convexes”, Publ. Math. Univ. Belgrade t. 1 (1932) p. 145—148. Nous reviendrons d'ailleurs sur cette inégalité dans un autre travail.

2. Je prie le lecteur de se rapporter à la première note pour les hypothèses faites sur les fonctions et pour les notations.

Nous avons

$$A(h) = a + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_k}{k+1} + \frac{(b-a-\sum_{i=1}^k a_i)(1-\mu)}{n+1}.$$

Soit maintenant la fonction

$$h^*(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + (a_k - \varepsilon) x^k + (b-a-\sum_{i=1}^k a_i + \varepsilon) \left[\frac{x - \mu^* + |x - \mu^*|}{2(1-\mu^*)} \right]^n$$

où $\mu^* = \mu - \varepsilon \frac{n-k+(k+1)\mu}{(k+1)(b-a-\sum_{i=1}^k a_i + \varepsilon)}$ et ε un nombre positif tel que

$a_k - \varepsilon > 0$, $b-a-\sum_{i=1}^k a_i + \varepsilon > 0$, $0 < \mu^* < 1$, ce qui est bien réalisable.

La fonction h^* est encore une fonction élémentaire à au plus 1 sommet appartenant $(E_a^b)_n$. Nous avons $\mu^* < \mu$ et $A(h^*) = A(h)$. On vérifie, d'autre part, que la différence $h^* - h$ est nulle pour $x=0,1$, est négative au voisinage de 0 et ne peut s'annuler qu'en un seul point en dehors de 0 et 1. La propriété du Nr. précédent s'applique et on a

$$A_\varphi(h^*) > A_\varphi(h).$$

Il en résulte immédiatement que $A_\varphi(h^*)$ croît lorsque ε croît. Or, ε peut croître jusqu'à ce que l'une des égalités $\varepsilon = a_k$, $\mu^* = 0$ a lieu, donc

Lorsque la fonction φ et $A(f)$ sont donnés, le maximum de $A_\varphi(f)$ dans $(E_a^b)_n$ ne peut être atteint que si f est ou bien une fonction $h_\lambda(x)$, ou bien un polynôme de degré au plus égal à n .

Quel que soit f dans $(E_a^b)_n$ on a $a \leq A(f) \leq \frac{a+b}{2}$. Pour une fonction $h_\lambda(x)$ on a

$$A(h_\lambda) = a + \frac{(b-a)(1-\lambda)}{n+1}$$

donc $a \leq A(h_\lambda) \leq \frac{na+b}{n+1}$. Il en résulte qu'une fonction h_λ ne peut être

maximisante que si $a \leq A(f) \leq \frac{na+b}{n+1}$. Il est clair que si $A(f) > \frac{na+b}{n+1}$ la fonction (ou les fonctions) maximisante ne peut être qu'un polynôme.

3. Il reste à chercher les polynômes maximisants de $(E_a^b)_n$. Soit

$$P(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

$a_i \geq 0$, $i=1, 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n a_i = b-a$, un polynôme de $(E_a^b)_n$.

Supposons que la valeur donnée de $A=A(f)$ vérifie les inégalités

$$(1) \quad \frac{ja+b}{j+1} \leq A \leq \frac{(j-1)a+b}{j}, \quad 2 \leq j \leq n$$

et que $A(P)=A$. Le polynôme de $(E_a^b)_n$,

$$(2) \quad P^*(x) = a + \alpha x^{j-1} + \beta x^j$$

est alors complètement déterminé par la condition $A(P^*)=A(P)$. On a

$$\alpha = j(j+1) \left(A - \frac{ja+b}{j+1} \right), \quad \beta = j(j+1) \left[\frac{(j-1)a+b}{j} - A \right].$$

Mais, le polynôme P^*-P ne peut s'annuler qu'en un seul point différent de 0 et 1 et, de plus, ce polynôme est négatif dans le voisinage de 0. Il en résulte que $A_\varphi(P^*) > A_\varphi(P)$.

Finalement donc si on a l'inégalité (1), la fonction maximisante (unique) est le polynôme (2).

4. Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat définitif :

Si φ est une fonction définie, non-décroissante et non-concave (ou non-convexe) dans l'intervalle fermé $(0,1)$ et si f est une fonction de $(E_a^b)_n$, on a l'inégalité

$$(3) \quad \int_0^1 \varphi(f) dx \leq (\text{ou } \geq) \int_0^1 \varphi \left\{ a + j(j+1) \left[\left(A - \frac{ja+b}{j+1} \right) + \left(\frac{(j-1)a+b}{j} - A \right) x \right] x^{j-1} \right\} dx$$

$$\text{si } \frac{ja+b}{j+1} \leq A \leq \frac{(j-1)a+b}{j}, \quad 2 \leq j \leq n.$$

et l'inégalité

$$(4) \quad \int_0^1 \varphi(f) dx \leq (\text{ou } \geq) \frac{b+na-(n+1)A}{b-a} \varphi(a) + \frac{(n+1)(A-a)}{n(b-a)^{\frac{n}{n-1}} b-a} \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n-1}}}$$

$$\text{si } a \leq A \leq \frac{na+b}{n+1}.$$

Si de plus la fonction φ est convexe (ou concave), l'égalité dans (3) n'est possible que si

$$f(x) = a + j(j+1) \left[\left(A - \frac{ja+b}{j+1} \right) + \left(\frac{(j-1)a+b}{j} - A \right) x \right] x^{j-1}$$

et l'égalité dans (4) que si

$$f(x) = a + (b-a) \left[\frac{x-\lambda + |x-\lambda|}{2(1-\lambda)} \right]^n, \quad \lambda = \frac{b+na-(n+1)A}{b-a}.$$

Si on a $A = \frac{ja+b}{j+1}$, la formule (3) ou (4) peut aussi s'écrire

$$\int_a^1 \varphi(f) dx \leq (\text{ou} \geq) \frac{I}{j \sqrt[j]{b-a}} \int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt[j]{(x-a)^{j-1}}}.$$

5. Dans le cas $n=0$, f est une fonction continue et non-décroissante. Le maximum de $\Delta_\omega(f)$ n'est atteint par aucune fonction f . On a

$$\max_{\Lambda_\varphi} (f) = \frac{(b-A) \varphi(a) + (A-a) \varphi(b)}{b-a},$$

mais l'égalité ne peut avoir lieu si φ est convexe et f continue. Le maximum est, dans ce cas, atteint par des fonctions limites de $(E_a^b)_0$. Une telle fonction maximisante est, par exemple, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} a, & 0 \leq x \leq \frac{b-A}{b-a} \\ b, & \frac{b-A}{b-a} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Si φ est une fonction concave on a la même propriété pour le minimum de l'intégrale $\Lambda_{\varphi}(f)$.

114. INVARIANTS DE DEUX SURFACES NON
HOLONOMES COMPLEMENTAIRES

Fig. 12. *Stenotaphrum secundatum* L. A. B. C.
(Reprinted with permission from [10]).

Donc un théorème récent, W. E. R. Steinitz et al. [1] sur les propriétés projectives et topologiques de deux variétés (surfaces) aux homomorphismes H_2 , complémentaires dans l'espace à quatre dimensions¹, se déduit ainsi d'interprétation projective de certains théorèmes, dont quelques-uns étaient connus par l'étude analytique de ces variétés aux homomorphismes.

Dans cette Note il s'agit de montrer, comment on peut passer à un système aux dérivées, au système complet d'invariants topologiques, dans le cas général où les deux systèmes de Pfaff, de deux équations à quatre variables, qui définissent un système, n'est pas des configurations intégrales. Pour cela voir que dans le cas où un système est des configurations intégrales, on peut se servir aussi des invariants topologiques, pour déterminer facilement une certaine projection des invariants.

En effet, se donner une valeur aux lettres de Σ_0^* c'est se donner un système de $\text{Pr}(\mathcal{A})$ de deux équations dans quatre variables.

$$u_i = \begin{cases} \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{1}{2}, \frac{d\theta^2}{dt^2} = 0, & (i = 1, 2, 3, 4) \\ \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{1}{2}, \frac{d\theta^2}{dt^2} = 0, & \end{cases}$$

et $\mathcal{H}_1^2, \mathcal{H}_2^2$ sont des fonctions des quatre variables x^1, x^2, x^3, x^4 . Le variétés $\mathcal{H}_i^2$ ont été aussi notées, et le système $\mathcal{H}_i$ qui diffère cette variétés, n'est pas complètement intelligible. Donc le cas considéré, par une transformation de variables, ce système peut être écrit

$$dH^1 = dH^2 = 0, \quad dH^3 = dH^4 = 0$$

et la variété holonome $\mathbb{H}_n^2$ se compose de n^2 surfaces affines en dimension 2 et n^2 de dimension constante. On donne une autre variété (parfois) non holonome complémentaire à la précédente, c'est un espace à autre système à différentiation totale.

$$\mathcal{H}_2 \left\{ \begin{array}{l} \dot{A}^T = -A^T A^T = 0, \\ \dot{A}^T = -A^T A^T = 0. \end{array} \right.$$

© 2004 Blackwell Publishing Ltd, *Journal of Internal Medicine* 255: 299–306

¹⁰ Vgl. H. Thiermann, Das gegenwärtige Recht des Rückkaufs, Abhandl. des St. Rechts, Hamburg 1916.