

fonction, d'après le théorème rappelé, vers $y(x)$, uniformément dans tout intervalle fini de la demi-droite $x \geq x_0$. Je montrerai que les fonctions de cette suite sont également continues à l'infini. Tout d'abord, il est évident, d'après nos hypothèses, que $J_n(x)$ a une limite finie V_n pour $x \rightarrow \infty$. On aura ainsi

$$V_n - J_n = \int_0^{\infty} f(t, J_n) dt$$

d'où

$$V_n - J_n = \int_0^{\infty} f(t, J_n) dt$$

donc $|V_n - J_n| < \frac{M}{p^2}$. Supposons donc, d'une manière générale, que $J_n(x)$

ait une limite finie V_n pour $x \rightarrow \infty$, et que l'on ait

$$(9) \quad |V_n - J_n(x)| < \frac{M}{p^2}$$

on pourra montrer qu'il en sera de même pour J_{n+1} . En effet, on peut écrire

$$J_{n+1}(x) = J_n + \int_0^x f(t, V_n) dt + \int_0^x [f(t, J_n) - f(t, V_n)] dt,$$

on aura

$$J_{n+1}(x) = J_n + \int_0^x f(t, V_n) dt + \int_0^x \left[\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right]_{y=V_n} (J_n - V_n) dt,$$

où $J_n \leq V_n \leq J_n$. La première intégrale du second membre est une constante pour $x \rightarrow \infty$, et il en est de même de la seconde, car

$$\left| \int_0^{\infty} (J_n - V_n) \frac{\partial f}{\partial y} dt \right| < \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} \right) M M < \frac{M M}{p^2}$$

Donc $J_{n+1}(x)$ a une limite finie V_{n+1} pour $x \rightarrow \infty$; j'aurai alors

$$V_{n+1} - J_{n+1} = \int_0^{\infty} f(t, V_n) dt,$$

d'où $|V_{n+1} - J_{n+1}| < \frac{M}{p^2}$. La relation (9) est donc générale. En pre-

nant $x_0 = \left(\frac{M}{\epsilon} \right)^{1/p}$, on aura, pour $x \geq x_0$,

$$|V_n - J_n| < \epsilon.$$

quel que soit ϵ , donc les fonctions de la suite (9) sont également continues à l'infini. Comme, d'autre part,

$$|J_n(x)| < |J_n| + \frac{M}{p^2}$$

quel que soit x , on en déduit

$$|V_n| \leq |J_n| + \frac{M}{p^2}$$

donc la suite $\{J_n\}$ est bornée. Elle aura, d'après le raisonnement de n° précédent, un seul point limite V , et le théorème général nous donnera

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = V.$$

Évidemment, on pourrait obtenir le même résultat avec d'autres conditions, au lieu de f et au produit $f \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$ une dérivée plus rapide que celle de $1/x$.

112. SUR QUELQUES INÉGALITÉS ENTRE LES FONCTIONS CONVEXES

(PREMIÈRE NOTE)

Par TIBERIU POPOVICIU, Mc. A./S. R.

(Séance du 4 mars 1938).

1. Soit $\varphi = \varphi(x)$ une fonction définie, uniforme, continue et convexe (d'ordre 1) dans l'intervalle fermé $(0, 1)$. Nous supposons que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$. Il en résulte que $\varphi(x)$ est une fonction positive et croissante pour $0 < x \leq 1$. La dérivée à droite $\varphi'(x)$ existe, est croissante pour $0 \leq x < 1$, mais peut ne pas être bornée dans $(0, 1)$.

Considérons aussi une fonction $f = f(x)$, définie, uniforme, continue et non-concave d'ordre $0, 1, \dots, n$ dans l'intervalle $(0, 1)$ ¹⁾. Nous supposons que $f(0) = a \geq 0$, $f(1) = b \leq 1$, $a < b$ et nous désignerons par $(E_a^b)_n$ l'ensemble des fonctions vérifiant toutes ces propriétés. On voit que $(E_a^b)_n \subset (E_a^b)_{n-1}$, donc $(E_a^b)_n \subset (E_a^b)_0$, $n > 0$. Dans ce travail nous

1. On dit aussi qu'une telle fonction est $(n+1)$ -fois monotone.

supposons $n > 0$. Nous indiquerons les résultats aussi pour $n = 0$, qui sont d'ailleurs à peu près tous connus.

Le problème que nous examinerons dans ce travail est le suivant :

Etant donnée la fonction φ , déterminer le maximum de $A_\varphi(f)$ lorsque $A(f)$ est donné et f parcourt l'ensemble $(E_a^b)_n$.

Nous avons posé

$$A = A(f) = \int_0^1 f dx, \quad A_\varphi = A_\varphi(f) = \int_0^1 \varphi(f) dx.$$

Nous ferons ensuite quelques applications, en généralisant certains résultats connus.

2. Appelons fonction élémentaire de degré n toute fonction dont la $(n-1)^{\text{ème}}$ dérivée est une ligne polygonale. Une telle fonction est donc de la forme

$$(I) \quad g(x) = P(x) + \sum_{i=1}^m c_i \left[\frac{x - x_i + |x - x_i|}{2(1 - x_i)} \right]^n$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}, \quad 0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1.$$

Nous supposons que $c_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ et nous dirons alors que la fonction élémentaire $g(x)$ est à m sommets. Nous dirons que les sommets sont aux points $x_1, x_2, \dots, x_m$. Si $x_1 = 0$ il y a un sommet au point 0^2 . Pour que la fonction élémentaire $g(x)$ à m sommets appartienne à $(E_a^b)_n$ il faut et il suffit que l'on ait

$$a_0 = a, \quad a_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, n-1, \quad c_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad P(1) + \sum_{i=1}^m c_i = b.$$

Dans la suite nous considérons uniquement des fonctions élémentaires appartenant à $(E_a^b)_n$.

Conformément à la définition précédente, tout polynôme de degré $n-1$ est une fonction élémentaire de degré n à 0 sommets. Un polynôme de degré effectif n est une fonction élémentaire de degré n à 1 sommet, le sommet étant au point 0.

Parmi les fonctions à 1 sommet on trouve les suivantes

$$(2) \quad h_\lambda(x) = a + (b-a) \left[\frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2(1 - \lambda)} \right]^n, \quad (0 \leq \lambda < 1).$$

2. Nous avons déjà considéré de telles fonctions dans un travail antérieur, voir : Tiberiu Popoviciu, „Sur le prolongement des fonctions convexes d'ordre supérieur”. Bull. Math. Soc. Roum. Sc., t. 36 (1934), p. 75—108.

Dans le cas $n=1$ toutes les fonctions à un sommet sont de cette forme.

La fonction (1) peut s'écrire

$$g(x) = \frac{(b-a)P(x) + a[P(1)-b]}{b-a} + \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^m c_i h_{x_i}(x),$$

qui nous montre qu'elle est la moyenne arithmétique (généralisée) d'un polynôme de degré $n-1$ et de m fonctions de la forme (2).

Toute fonction de $(E_a^b)_n$ est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions élémentaires de $(E_a^b)_n$. Cette propriété peut d'ailleurs se préciser de la manière suivante. Si f appartient à $(E_a^b)_n$, les dérivées $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ existent pour $0 \leq x < 1$. La fonction f est alors la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions élémentaires de $(E_a^b)_n$, ces fonctions ayant toutes le même premier terme $P(x) = a + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)$. De plus on peut supposer que la valeur de l'intégrale A est la même pour toutes ces fonctions.

Ces considérations s'appliquent, en particulier, à la fonction φ , qui appartient à $(E_0^1)_1$, et servent à établir en toute rigueur les affirmations suivantes.

3. Soit φ donnée et $g(x)$ une fonction élémentaire de $(E_a^b)_n$ ayant $m > 1$ sommets et donnée par la formule (1). Construisons la fonction.

$$g^*(x) = P(x) + \sum_{i=1}^{m-2} c_i \left[\frac{x - x_i + |x - x_i|}{2(1 - x_i)} \right]^n + c \left[\frac{x - \mu + |x - \mu|}{2(1 - \mu)} \right]^n \quad 3)$$

et déterminons les constantes c, μ de manière que l'on ait $g^*(1) = b$,

$A(g^*) = A(g)$. On trouve que $c = c_{m-1} + c_m$ et $\mu = \frac{c_{m-1} x_{m-1} + c_m x_m}{c_{m-1} + c_m}$, donc $x_{m-1} < \mu < x_m$, $c > 0$ et g^* est bien une fonction élémentaire de degré n à $m-1$ sommets appartenant à $(E_a^b)_n$.

Il existe un nombre μ' , $\mu < \mu' < 1$ tel que l'on ait

$$(3) \quad g^*(x) \leq g(x) \text{ suivant que } x \leq \mu', \text{ pour } x_{m-1} < x < 1 \quad 4)$$

3. Dans le cas $m=2$, on a évidemment

$$g^*(x) = P(x) + c \left[\frac{x - \mu + |x - \mu|}{2(1 - \mu)} \right]^n$$

4. La position du point μ' dans l'intervalle $(\mu, 1)$ dépend des valeurs de c_{m-1}, c_m . En particulier, si $n=1$ on a toujours $\mu < \mu' < x_m$.

Considérons la fonction

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2}, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Si $g(x_{m-1}) < \lambda < b$, on a

$$A_{\varphi_\lambda}(g^*) - A_{\varphi_\lambda}(g) = \int_{t^*}^1 g^* dx - \int_t^1 g dx + \lambda(t^* - t),$$

où $\lambda = g(t) = g^*(t^*)$ et la propriété (3) nous montre que cette fonction de λ s'annule pour $\lambda = g(x_{m-1})$ et $\lambda = b$, est croissante pour $g(x_{m-1}) < \lambda < g(\mu')$ et décroissante pour $g(\mu') < \lambda < b$. Il en résulte donc que

$$(4) \quad A_{\varphi_\lambda}(g^*) > A_{\varphi_\lambda}(g), \quad g(x_{m-1}) < \lambda < b.$$

4. Nous nous proposons de démontrer maintenant que $A_{\varphi}(g^*) > A_{\varphi}(g)$. L'inégalité avec le signe $\geq$ résulte bien de (4), mais il s'agit de prouver que l'égalité n'est pas possible.

Considérons la fonction, non-décroissante et non-concave,

$$\Phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{dans } (0, 1-\varepsilon) \\ \varphi(1-\varepsilon) + (x-1+\varepsilon)\varphi'(1-\varepsilon), & \text{dans } (1-\varepsilon, 1), \end{cases}$$

où ε est un nombre positif assez petit et φ' est la dérivée à droite de φ . Nous avons

$$(5) \quad \Phi_\varepsilon(x) = \int_0^1 \varphi_t(x) d\Phi'_\varepsilon(t) + \alpha x,$$

l'intégrale étant de Stieltjes et α une constante sans importance pour nous⁵⁾.

On peut facilement démontrer que

$$A_{\Phi_\varepsilon}(g^*) - A_{\Phi_\varepsilon}(g) = \int_0^1 \{ A_{\varphi_t}(g^*) - A_{\varphi_t}(g) \} d\Phi'_\varepsilon(t)$$

5. Cette formule est analogue à celle donnée pour les fonctions non-convexes par MM. W. Blaschke et G. Pick, voir: „Distanzschätzungen im Funktionenraum II". Math. Ann. Bd. 77 (1916) p. 277—300. L'introduction de la fonction Φ_ε n'est nécessaire que si $b=1$. Il peut arriver, en effet, que la dérivée à droite de $\varphi(x)$ ne soit pas à variation bornée.

qui résulte du fait que l'intégrale de Stieltjes du second membre existe.

De cette formule et de la définition de Φ_ε il résulte que $A_{\Phi_\varepsilon}(g^*) - A_{\Phi_\varepsilon}(g)$ est positif et ne décroît pas lorsque ε décroît. On a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [A_{\Phi_\varepsilon}(g^*) - A_{\Phi_\varepsilon}(g)] = A_\varphi(g^*) - A_\varphi(g) > 0.$$

5. Considérons maintenant une fonction f de $(E_a^b)_n$. Soit la fonction élémentaire de degré n à 1 sommet

$$h(x) = a + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + d \left[\frac{x - \rho + |x - \rho|}{2(1-\rho)} \right]^n$$

où d, ρ sont complètement déterminés par les conditions $h(1) = b$, $A(h) = A(f)$. $h(x)$ appartient à $(E_a^b)_n$ et on a $A_\varphi(h) \geq A_\varphi(f)$. Nous nous proposons de démontrer que l'égalité n'est possible que si $h=f$.

Reprenons la formule (5); nous avons

$$A_{\Phi_\varepsilon}(h) - A_{\Phi_\varepsilon}(f) = \int_0^1 \{ A_{\varphi_t}(h) - A_{\varphi_t}(f) \} d\Phi'_\varepsilon(t)$$

La fonction $A_{\varphi_t}(h) - A_{\varphi_t}(f)$ est continue en t et est ≥ 0 .

On démontre facilement que si f ne se réduit pas à une fonction élémentaire de degré n à 0 ou 1 sommet, cette fonction n'est pas identiquement nulle. On a donc $A_{\Phi_\varepsilon}(h) - A_{\Phi_\varepsilon}(f) > 0$, tout au moins pour ε assez petit. La propriété demandée en résulte comme plus haut.

Finalement donc:

Si la fonction φ et le nombre $A(f)$ sont donnés, le maximum de $A_\varphi(f)$ dans $(E_a^b)_n$ ne peut être atteint que pour une fonction élémentaire de degré n à au plus 1 sommet.

Dans le cas $n=1$ la fonction $h(x)$ est complètement déterminée par la valeur de l'intégrale A . On a donc la propriété suivante:

Si φ est donnée et f une fonction continue, non-décroissante et non-concave dans $(0, 1)$, on a

$$(6) \quad \int_0^1 \varphi(f) dx \leq \frac{b+a-2A}{b-a} \varphi(a) + \frac{2(A-a)}{(b-a)^2} \int_a^b \varphi(x) dx, \quad A = \int_0^1 f dx$$

l'égalité n'étant possible que pour la fonction

$$f = a + (b-a) \frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2(1-\lambda)}, \quad \lambda = \frac{b+a-2A}{b-a}.$$