

28. SUR LES DIFFÉRENCES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

par TIBERIU POPOVICIU

Présentée par Miron Nicolesco, Mc. A. S. R.

(Séance du 4 juin 1937).

I. Nous considérons des fonctions réelles, de la variable réelle x , définies et uniformes dans un intervalle fini et fermé qu'on peut supposer être $(0,1)$. Posons, comme d'habitude,

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x+ih), \quad x+ih \in (0,1).$$

M. A. Marchaud a démontré¹⁾ que si $f(x)$ est bornée et si $\Delta_h^n f(x)$ tend uniformément vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$, la fonction $f(x)$ est continue dans $(0,1)$.

Nous avons la propriété plus précise :

Si $f(x)$ est bornée dans un sous-intervalle, si petit soit-il, et si $\Delta_h^n f(x)$ tend uniformément vers zéro pour $h \rightarrow 0$, la fonction $f(x)$ est continue dans $(0,1)$.

Il suffit de démontrer que si $f(x)$ est bornée dans $(c,1)$ elle l'est aussi dans $(0,1)$. Soit $|f(x)| < M$, $x \in (c,1)$ et $0 < \eta < \frac{1-c}{n-1}$ tel que $|\Delta_h^n f(x)| < M$ pour $|h| < \eta$. On a $|f(x)| < 2^n M$ pour $x \geq c - \eta$, d'où on déduit que

$$|f(x)| < 2^{ns} M, \quad x \in (0,1), \quad s > \frac{c}{\eta}.$$

Nous allons démontrer maintenant que le théorème de M. A. Marchaud s'étend aux fonctions mesurables :

Si $f(x)$ est mesurable dans $(0,1)$ et si $\Delta_h^n f(x)$ tend uniformément vers zéro pour $h \rightarrow 0$, la fonction $f(x)$ est continue dans $(0,1)$.

En effet, si $f(x)$ n'est pas bornée, elle ne l'est pas non plus dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Soit $0 < \eta < \frac{1}{2n}$ tel que $|\Delta_h^n f(x)| < 1$ pour $|h| \leq \eta$.

Étant donné un nombre $A > 0$, il existe un $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tel que

$$|f(\xi)| > 1 + (2^n - 1)A. \text{ Mais on a } |\Delta_h^n f(\xi)| < 1 \text{ pour } \frac{n-1}{h}\eta < h < \eta,$$

1. A. Marchaud: Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles. Journ. de Math. t. 6 (1927), p. 337—425.

donc $|f(\xi + ih)| > 1 + (2^n - 1)A$. A pour au moins un i , $1 \leq i \leq n$. On en déduit que l'ensemble $E \left[|f(x)| > A \right]$ est de mesure $\geq \frac{\eta}{n}$. Le nombre A étant quelconque, c'est en contradiction avec un théorème de M. E. Borel sur les fonctions mesurables. La propriété énoncée en résulte. Le cas de l'équation $\Delta_h^n f(x) = 0$ a été étudié par M. W. Sierpinski ($n = 2$)¹⁾ et par nous-mêmes ($n > 2$)³⁾.

2. Considérons l'expression plus générale³⁾.

$$(I) \quad \Delta_h^{(n)} f(x) = \sum_{i=0}^n a_i f(x+ih)$$

les a_i étant des constantes données. Cette expression est d'ordre k si $\sum_{i=0}^n a_i i^j = 0$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, $\sum_{i=0}^n a_i i^k \neq 0$, donc si le polynôme

$F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ a la racine 1 d'ordre k de multiplicité. Dans ce cas on peut déterminer un entier positif p et deux polynômes $\varphi(x)$, $\psi(x)$, de manière que l'on ait⁴⁾ :

$$\varphi(x) F(x) + \psi(x) F(x^p) \equiv (1 - x^p)^k.$$

Il en résulte qu'on a une relation de la forme

$$(2) \quad \Delta_{ph}^k f(x) = \sum_{i=0}^{pn-k-i} \alpha_i \Delta_h^{(n)} f(x+ih) + \sum_{i=0}^{n-k-i} \beta_i \Delta_{ph}^{(v)} f(x+ih),$$

les α_i , β_i étant des constantes indépendantes de x , h et de la fonction $f(x)$.

On voit que les propriétés du Nr. 1 restent vraies pour l'expression (I). En particulier, si $\sum_{i=0}^n a_i = 0$ et si (I) tend uniformément vers zéro, la fonction $f(x)$ est nulle identiquement dans $(0,1)$. Si

1. W. Sierpinski: Sur les fonctions convexes mesurables. Fund. Math. t. I (1920), p. 125—129). M. W. Sierpinski a démontré aussi ce théorème sans utiliser l'axiome de Zermelo, voir: Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ id. p. 116—122.

2. T. Popoviciu: Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles. Mathematica t. VIII (1934) p. 1—85.

3. T. Popoviciu: Sur certaines équations fonctionnelles définissant des polynômes". Mathematica t. X, (1934), p. 197—211.

4. Nous donnerons la démonstration dans un travail qui paraîtra dans le t. XIV de la revue „Mathematica”.



$\sum_{i=0}^n a_i = 0$, $\sum_{i=0}^n a_i i = 0$ et si (1) tend vers zéro pour tout x , la fonction est continue dans $(0,1)$.

3. M. A. Marchaud a également démontré que si $f(x)$ est bornée et si le rapport $h^{-k} \Delta_h^k f(x)$ tend uniformément vers une fonction déterminée $g(x)$, la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue qui est (évidemment) égale à $g(x)$. Démontrons que ce théorème est encore vrai pour les fonctions mesurables, donc

Si $f(x)$ est mesurable et si $h^{-k} \Delta_h^k f(x)$ tend uniformément vers une fonction $g(x)$, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $f(x)$ existe, est continue et on a $f^{(k)}(x) = g(x)$ dans $(0,1)$.

En effet, pour tout h , $h^{-k} \Delta_h^k f(x)$ est une fonction mesurable, donc $g(x)$ l'est aussi. Remarquons que $\Delta_{2h}^k f(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta_h^k f(x + ih)$,

donc

$$\left| \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} g(x + ih) - g(x) \right| \leq \left| \frac{\Delta_{2h}^k f(x)}{(2h)^k} - g(x) \right| + \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left| \frac{\Delta_h^k f(x + ih)}{h^k} - g(x + ih) \right|$$

L'expression d'ordre 1,

$$\frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} g(x + ih) - g(x),$$

tend donc (d'ailleurs uniformément) vers zéro. Il en résulte que $g(x)$ est continue et, par conséquent, bornée dans $(0,1)$. Alors, $\Delta_h^k f(x)$ tend uniformément vers zéro, donc $f(x)$ est aussi continue. La propriété énoncée en résulte.

Si on pose $f(x) = x^k$ dans (2), on trouve

$$\frac{1}{p^k} \sum_{i=0}^{pn-k-1} \alpha_i + \sum_{i=0}^{n-k-1} \beta_i = \frac{k!}{\sum_{i=0}^k a_i i^k}$$

et nous déduisons la propriété suivante :

Si $f(x)$ est mesurable ou si $f(x)$ est bornée et si $h^{-k} \Delta_h^k f(x)$ tend uniformément vers une fonction $g(x)$, la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue et on a

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{\sum_{i=0}^k a_i i^k} g(x), \quad x \in (0,1).$$

On a vu que la fonction $f(x)$ est continue dans $(0,1)$. On a vu aussi que la fonction $f(x)$ est bornée dans $(0,1)$. On a vu encore que la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue qui est égale à $g(x)$. On a vu enfin que la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue qui est égale à $g(x)$.

On a vu que la fonction $f(x)$ est continue dans $(0,1)$. On a vu aussi que la fonction $f(x)$ est bornée dans $(0,1)$. On a vu encore que la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue qui est égale à $g(x)$. On a vu enfin que la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue qui est égale à $g(x)$.

On a vu que la fonction $f(x)$ est continue dans $(0,1)$. On a vu aussi que la fonction $f(x)$ est bornée dans $(0,1)$. On a vu encore que la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue qui est égale à $g(x)$. On a vu enfin que la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue qui est égale à $g(x)$.

On a vu que la fonction $f(x)$ est continue dans $(0,1)$. On a vu aussi que la fonction $f(x)$ est bornée dans $(0,1)$. On a vu encore que la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue qui est égale à $g(x)$. On a vu enfin que la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue qui est égale à $g(x)$.

On a vu que la fonction $f(x)$ est continue dans $(0,1)$. On a vu aussi que la fonction $f(x)$ est bornée dans $(0,1)$. On a vu encore que la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue qui est égale à $g(x)$. On a vu enfin que la fonction $f(x)$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ continue qui est égale à $g(x)$.