

SUR LES SOLUTIONS BORNÉES ET LES SOLUTIONS MESURABLES DE CERTAINES EQUATIONS FONCTIONNELLES

par

Tiberiu Popoviciu

à Cernăuți

Reçu le 5 Novembre 1937.

SOMMAIRE

INTRODUCTION.

CHAPITRE I. — *Notations et quelques propriétés préliminaires.*

CHAPITRE II. — *Sur une classe d'équations fonctionnelles à une variable.*

CHAPITRE III. — *Sur les pseudo-polynômes de deux ou de plusieurs variables.*

CHAPITRE IV. — *Sur quelques équations fonctionnelles à plusieurs variables indépendantes.*

CHAPITRE V. — *Sur quelques propriétés fonctionnelles caractérisant les polynômes de deux variables.*

BIBLIOGRAPHIE.

Introduction

Le but de ce travail est de résoudre l'équation fonctionnelle

$$(I) \quad \sum a_{i_1 i_2 \dots i_m} f(x_1 + \alpha_{1i_1} h_1, x_2 + \alpha_{2i_2} h_2, \dots, x_m + \alpha_{mi_m} h_m) = 0,$$

où $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ est la fonction inconnue à m variables. On suppose que l'équation (I) est vérifiée, dans un certain domaine D , quels que soient $x_1, x_2, \dots, x_m, h_1, h_2, \dots, h_m$. Les $a_{i_1 i_2 \dots i_m}$ et les α_{ji} sont des constantes données et la sommation est étendue aux valeurs $i_j = 0, 1, \dots, n_j, j = 1, 2, \dots, m$.

Nous avons déjà étudié un cas particulier de l'équation (I), lorsqu'il y a deux variables indépendantes [11] (*).

(*) Les chiffres gras dans les crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin du travail.

Dans le cas d'une variable, l'équation peut s'écrire

$$(II) \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x + \alpha_i h) = 0$$

et est une généralisation de l'équation aux différences, bien connue,

$$(III) \quad \Delta_h^n f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x + ih) = 0.$$

Dans le cas de m variables, l'équation aux différences peut s'écrire

$$(IV) \quad \Delta_{h_1}^{n_1} \Delta_{h_2}^{n_2} \dots \Delta_{h_m}^{n_m} f(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

où $\Delta_{h_j}^{n_j}$ opère sur la variable x_j .

Remarquons que si la solution $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, de l'équation (I), admet un nombre suffisant de dérivées partielles, elle doit vérifier un certain système d'équations aux dérivées partielles, homogènes et à coefficients constants. On obtient facilement ces équations en faisant tendre, après des modifications convenables, vers zéro les h dans le premier membre de l'équation. (I).

La solution générale de ce système d'équations aux dérivées partielles est une somme de fonctions de la forme

$$(V) \quad x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_r^{l_r} A(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m)$$

où les l sont des entiers non-négatifs et A est une fonction arbitraire de $m-r$ variables (on a $r \geq 1$).

Nous démontrons que la solution générale de l'équation (I) est de la même forme, sous des hypothèses beaucoup plus générales. Il en est ainsi si on suppose la fonction mesurable par rapport à chacune des variables. En particulier, il en est ainsi si on suppose la fonction mesurable B .

Nous signalons aussi des équations pour lesquelles on a le même résultat sous la seule hypothèse que la fonction est bornée. En particulier, l'équation (IV) jouit de cette propriété, comme l'a démontré (pour $m = 1, 2$) M. A. MARCHAUD [8].

Nous avons divisé ce travail en cinq chapitres.

Dans le chap. I nous étudions, avec détails, les propriétés de l'opération exprimée par le premier membre de l'équation (I). Ces sont des propriétés algébriques qui permettent de réduire le problème à la résolution d'une équation de la même forme mais plus

simple [équation (52) du chap. IV]. On peut dire aussi que nous établissons des propriétés algébriques qui permettent de revenir toujours à des équations dans lesquelles les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ont des valeurs plus simples (sont d'ailleurs égaux à ± 1).

Au chap. II nous faisons une étude complète de l'équation (II), en complétant et en généralisant nos résultats antérieurs [11].

Le chap. III. est consacré à l'étude des pseudo-polynômes de deux ou de plusieurs variables indépendantes. Cette étude préliminaire est nécessaire pour pouvoir bien préciser la forme de la solution générale de l'équation (I).

Le problème de la résolution de l'équation (I) est traité au chap. IV. Nous déterminons complètement toutes les solutions de la forme (V). En particulier, nous établissons des conditions nécessaires et suffisantes pour que, sous les hypothèses signalées, la solution générale de l'équation soit un polynôme.

Dans le chap. V nous faisons une application des résultats précédents. Nous démontrons que, sous des hypothèses très générales, toute fonction de deux variables, qui est un pseudo-polynôme par rapport à deux systèmes d'axes complètement distinctes, se réduit nécessairement à un polynôme. Nous possédons également la généralisation de cette propriété pour le cas de m variables, mais notre démonstration est basée sur la théorie des équations que nous appelons de première espèce. Nous avons seulement signalé ces équations, leur étude fera l'objet d'un autre travail et nous donnerons alors aussi la généralisation des résultats du chap. V.

CHAPITRE I

Notations et quelques propriétés préliminaires

1. Etant donnée une fonction $f(x)$, d'une variable x , nous définissons l'opération $\Delta_h^{(\alpha_i)}$ par la formule suivante :

$$(1) \quad \Delta_h^{(\alpha_i)} f(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x + \alpha_i h)$$

Une telle opération est donc caractérisée par deux suites de constantes: les coefficients (réels) $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ et les pseudo-périodes (réelles) $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Dans les problèmes, que nous exa-

minerons dans ce travail, chacune de ces suites a un caractère homogène; seuls les rapports mutuels de leurs termes interviennent d'une façon essentielle. Bien entendu, l'opération $\Delta_h^{(\alpha_i)}$ n'a de sens que si les coefficients α_i ne sont pas tous nuls. D'ailleurs nous supposons, en général, que tous les α_i sont différents de zéro et que les z_i sont distincts. Ceci étant, le produit de deux opérations $\Delta_h^{(\alpha_i)}$, $\Delta_h^{(\beta_i)}$ est encore une opération de même nature. Si les expressions $\Delta_h^{(\alpha_i)} f(x)$ et $\Delta_h^{(\beta_i)} f(x)$ contiennent $n+1$ et $m+1$ termes respectivement, l'expression produit $\Delta_h^{(\beta_i)} \Delta_h^{(\alpha_i)} f(x)$ contient $(n+1)(m+1)$ termes en général, mais ce nombre peut être aussi plus petit. Ce qui est essentiel est que :

Le produit de deux opérations a toujours un sens et cette multiplication est commutative.

Examinons quelques cas particuliers de l'opération (1). L'expression

$$(2) \quad \Delta_h^n f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x + ih)$$

est une différence d'ordre n de la fonction $f(x)$. Posons $\phi(x) = (x-z_0)(x-z_1)\dots(x-z_n)$ et supposons que $\alpha_i = \frac{1}{\phi'(z_i)}$; l'opération correspondante nous donne alors l'expression

$$(3) \quad \sum_{i=0}^n \frac{f(x + \alpha_i h)}{\phi'(\alpha_i)}.$$

C'est une généralisation de la différence (2). Cette expression a été étudiée, en particulier, par M. A. DENJOY [5]. Un autre cas particulier important est le cas où $\alpha_i = i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Nous obtenons l'expression

$$(4) \quad \Delta_h^{(n)} f(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x + ih)$$

où il est inutile de faire la restriction $\alpha_i \neq 0$ pour tous les i .

C'est le cas où les rapports mutuels des pseudo-périodes α_i sont rationnels. Enfin, nous considérons aussi des expressions de la forme

$$(5) \quad \delta_h^{(\alpha_i)} f(x) = \sum (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} f[x + (i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2 + \dots + i_n\alpha_n)h],$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs $i_j = 0, 1, j = 1, 2, \dots, n$.

Avant d'aller plus loin, disons, une fois pour toute, que nous parlerons d'ordre, de polynôme caractéristique, de réductibilité, ... etc. indifféremment de l'opération $\Delta_h^{(\alpha_i)}$, de l'expression $\Delta_h^{(\alpha_i)} f(x)$, de l'équation $\Delta_h^{(\alpha_i)} f(x) = 0$, ... etc. Le même langage commun sera employé dans le cas de plusieurs variables.

2. Définissons maintenant l'ordre de l'expression (1). Cet ordre est égal au nombre k pour lequel

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i = \sum_{i=0}^n \alpha_i \alpha_i = \dots = \sum_{i=0}^n \alpha_i \alpha_i^{k-1} = 0, \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i \alpha_i^k \neq 0.$$

Si $\sum_{i=0}^n \alpha_i \neq 0$ l'expression est d'ordre 0. Si $k = n$ l'expression est d'ordre n et est nécessairement de la forme (3).

Attachons à l'expression (1) le polynôme caractéristique du premier type $F^*(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^{\alpha_i}$. En général ce n'est pas un polynôme proprement dit, mais un polynôme en x^{α_i} . L'ordre k est alors caractérisé par les relations

$$F^*(1) = F^{*(1)}(1) = \dots = F^{*(k-1)}(1) = 0, \quad F^{*(k)}(1) \neq 0.$$

Par exemple, l'expression (5) est d'ordre n .

Deux expressions ayant pour polynômes caractéristiques $F^*(x)$ et $F^*(x^p)$, où p est un entier positif, sont équivalentes. Dans le cas de l'expression (4) $F^*(x)$ est effectivement un polynôme. En particulier, pour (2) nous avons $F^*(x) = (x-1)^n$.

Nous dirons qu'une expression de la forme (1) est une conséquence de (1) si son polynôme caractéristique du premier type est de la forme $\phi_1(x) F^*(x^{p_1}) + \phi_2(x) F^*(x^{p_2}) + \dots$ où $p_1, p_2, \dots$ sont des entiers positifs $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ des polynômes en x ou, plus généralement, des combinaisons linéaires de certaines puissances de x .

Nous introduisons aussi un polynôme caractéristique du second type. Nous pouvons toujours supposer, sans restreindre la généra-

lité, que dans (1) on a $\alpha_0 = 0$. Appelons alors *expression associée à (1)* toute expression de la forme

$$(6) \quad \sum b f(x + \beta_i h)$$

où b sont les coefficients et les β_i sont de la forme $r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \dots + r_n \alpha_n$, les r_i étant des entiers positifs ou nuls. Nous dirons alors que le polynôme à n variables $\sum b x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ est le polynôme caractéristique, du second type, de l'expression (6). De cette façon, le polynôme caractéristique du second type est défini pour toutes les expressions associées à (1). En particulier, l'expression (1) elle-même a pour polynôme caractéristique $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. Deux expressions ayant pour polynômes caractéristiques $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $F(x_1^{p_1}, x_2^{p_2}, \dots, x_n^{p_n})$ où p est un entier positif, sont équivalentes. Toute expression (6) dont le polynôme caractéristique est de la forme

$$\phi_1 F(x_1^{p_1}, x_2^{p_2}, \dots, x_n^{p_n}) + \phi_2 F(x_1^{p_2}, x_2^{p_1}, \dots, x_n^{p_1}) + \dots,$$

où $p_1, p_2, \dots$ sont des entiers positifs et $\phi_1, \phi_2, \dots$ des polynômes en $x_1, x_2, \dots, x_n$, est une conséquence de (1).

Dans l'expression (1) x et h jouent le rôle de variables. Il en résulte que les expressions dont le polynôme caractéristique du premier type est de la forme $x^\beta F^*(x)$ ou celles dont le polynôme caractéristique du second type est de la forme $x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont équivalentes à (1).

Cette notion d'expression équivalente est bien claire. Deux expressions équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles. Toute expression équivalente à une conséquence de (1) est encore une conséquence de (1).

La considération des polynômes caractéristiques facilite considérablement notre étude.

Par exemple, l'expression (5), associée à (1), a pour polynôme caractéristique $(1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_n)$.

3. — Nous allons démontrer maintenant que :

Toute expression (1) a une conséquence de la forme (5).

Posons $p = \left[\frac{n+1}{2} \right]$, en désignant, comme d'habitude, par

$[x]$ le plus grand entier compris dans x . Soit

$$F_i = F(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) - (a_{p+1} x_{p+1} + a_{p+2} x_{p+2} + \dots + a_n x_n) \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$F_i = F(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) - \left(\frac{a_p}{2} x_p + a_{p+1} x_{p+1} + \dots + a_n x_n \right) \text{ si } n \text{ est impair.}$$

On voit alors que l'expression dont le polynôme caractéristique est

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_{p+1} \\ F_2 & F_3 & \dots & F_{p+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{p+1} & F_{p+2} & \dots & F_{2p+1} \end{vmatrix} = C x_1 x_2 \dots x_p [V(1, x_1, x_2, \dots, x_p)]^2,$$

est une conséquence de (1). Ici C est une constante (non-nulle) égale à $a_0 a_1 \dots a_p$ ou $a_0 a_1 \dots a_{p-1} \frac{a_p}{2}$, suivant que n est pair ou impair et $V(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ est le déterminant de Vandermonde des nombres $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. L'expression dont le polynôme caractéristique est $[V(1, x_1, x_2, \dots, x_p)]^2$ est équivalente à la précédente, donc est encore une conséquence de (1). Cette dernière expression est bien de la forme (5). Bien entendu, les x de ces deux expressions (1) et (5) correspondantes ne sont pas les mêmes. Les a de l'expression obtenue sont $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ et $\alpha_i - \alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, i-1$, $i = 1, 2, \dots, p$, chacun pris deux fois.

4. — Nous dirons que l'expression (1) est *réductible* si on peut trouver une conséquence de la forme (2) (ou une conséquence équivalente à (2)).

L'expression (1) est, en général, réductible. Soit toujours $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le polynôme caractéristique (du second type) de (1). On peut, en général, trouver n polynômes $A_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ tels que l'on ait

$$\sum_{i=1}^n A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) F(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) = \Phi(x_1),$$

$\Phi(x_1)$ étant un polynôme en x_1 seul. Ceci signifie qu'il existe une conséquence de la forme

$$(7) \quad \sum a'_i f(x + i \alpha_i h)$$

qui est aussi de la forme (4) et a pour polynôme caractéristique

du premier type $\Phi(x_1)$. Il est évident qu'une expression est réductible si elle a une conséquente réductible. Au Nr. suivant nous démontrerons que les expressions (4) sont réductibles, notre propriété énoncée est donc démontrée.

On sait, de la théorie de l'élimination, qu'on peut trouver les polynômes A_i tels que $\Phi(x_1)$ soit de degré $n!$. L'ordre de l'expression (7) est 0 en général, mais si l'expression (1) est d'ordre > 0 , (7) est au moins d'ordre n , ce qui résulte immédiatement du fait que les coefficients a'_i ne dépendent pas des nombres a_i . On peut d'ailleurs voir facilement que si l'expression (1) est d'ordre > 0 , le polynôme $\Phi(x_1)$ est de la forme $C(x-1)^{n!}$, C étant une constante, la réductibilité est donc démontrée. Dans des cas particuliers l'élimination peut donner un polynôme $\Phi(x_1)$ de degré $< n!$, toujours de la forme $C(x-1)^n$ si (1) est d'ordre > 0 , mais ce polynôme est au moins de degré n , à moins qu'il ne soit nul identiquement. Ces remarques ne s'appliquent pas aux expressions (1) d'ordre 0.

Il y a des cas d'exceptions où le raisonnement précédent ne s'applique plus. Il peut, en effet, arriver que le polynôme $\Phi(x_1)$ soit nul identiquement. Dans ce cas on est tenté de chercher, tout d'abord, d'autres valeurs pour les entiers positifs $p_1, p_2, \dots, p_n$ tel que l'on ait une relation de la forme

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) F(x_1^{p_i}, x_2^{p_i}, \dots, x_n^{p_i}) = \text{polynome non identiquement nul en } x_1 \text{ seul,}$$

mais il résulte de ce qui va suivre que cette égalité n'est pas possible si $\Phi(x_1)$ est nul identiquement.

On peut bien reconnaître si nous sommes dans ce cas exceptionnel par la propriété suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $\Phi(x_1)$ soit nul identiquement est qu'on puisse trouver deux égalités de la forme

$$(9) \quad a_0 + a_{\mu_1} + a_{\mu_2} + \dots + a_{\mu_i} = 0,$$

$$(9') \quad a_1 + a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \dots + a_{\nu_j} = 0,$$

où $i \equiv 1, j \equiv 1$ et les $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_i, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_j$ sont tous distincts et choisis parmi les nombres 2, 3, ..., n .

On voit facilement que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est aussi nécessaire. Nous allons démontrer cette propriété

par induction complète. Le fait que le polynôme $\Phi(x_1)$ est nul identiquement signifie que le système

$$(10) \quad F(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a une solution en $x_2, x_3, \dots, x_n$ pour toute valeur de x_1 . Pour qu'il en soit ainsi il suffit évidemment que cette propriété soit vraie pour une infinité de valeurs de x_1 . Remarquons encore qu'il existe alors certainement une solution finie en $x_2, x_3, \dots, x_n$ pour tout x_1 , d'après la forme même des équations (10). Rappelons aussi que nous supposons toujours $a_i \neq 0, i = 0, 1, \dots, n$.

La propriété est vraie pour $n = 2$ (et aussi pour $n = 1$) puisque dans ce cas $\Phi(x_1)$ ne peut être nul identiquement. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à $n-1$ et démontrons-la pour n . Le système (algébrique) (10) nous montre qu'il existe certainement un intervalle (c, d) et des fonctions $x_2 = x_2(x_1), x_3 = x_3(x_1), \dots, x_n = x_n(x_1)$ de x_1 , continues et dérivables lorsque x_1 est dans (c, d) et qui vérifie le système pour $c < x < d$. Substituant ces valeurs dans le système (10) et dérivant par rapport à x_1 , on trouve

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i' x_i' = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (x_1' = 1).$$

Ce système doit être compatible en $x_2', x_3', \dots, x_n'$ et on en déduit que $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ pour $c < x_1 < d$. Il faut donc que, pour une infinité de valeurs de x_1 , deux au moins des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ soient égales. On voit qu'ainsi notre problème est réduit au même problème où n est plus petit. Si on arrive au cas $n=2$, donc $F(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ il faut que $a_1 = 0, a_0 + a_2 = 0$ qui sont exactement les conditions (9) et (9'). Il faut toutefois remarquer que si x_1 est égal à l'une des variables $x_2, x_3, \dots, x_n$ une infinité de fois, il se peut que le nouveau système (10) soit toujours de la forme (10) où cependant $a_1 = 0$. On voit alors que l'égalité (9') est déjà démontrée et il reste à établir l'égalité (9). Or, cette égalité peut être obtenue très simplement, et indépendamment des considérations précédentes, en remarquant que le système

$$F(0, x_2^i, x_3^i, \dots, x_n^i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a une solution en $x_2, x_3, \dots, x_n$. On trouve immédiatement que l'un au moins des nombres $x_2, x_3, \dots, x_n$, constituant une solu-

tion, doit être égale à 1. On procède ensuite par induction. La propriété est complètement démontrée.

Si $\Phi(x_1)$ est nul identiquement on peut rechercher l'éliminant en l'une des autres variables $x_2, x_3, \dots, x_n$. De plus, on peut prendre comme premier coefficient a_0 l'un quelconque des autres coefficients a_i . Il peut, bien entendu, arriver que tous les éliminants ainsi obtenus soient nuls identiquement. Enfin, dans certains cas particuliers, on peut démontrer la réductibilité de l'expression (1) en cherchant un éliminant en 2, 3, ..., $n-1$ variables. Nous n'insistons pas sur ces cas.

Pour $n = 3$ l'expression (1) est toujours réductible, sauf si les coefficients sont proportionnels aux nombres 1, 1, -1, -1. Pour $n = 4$ l'expression est réductible, sauf si ses coefficients sont proportionnels aux nombres 2, 1, -1, -1, -1. Pour $n = 5$ le problème est déjà plus compliqué. Toute expression (1) est réductible dans ce cas, sauf si les coefficients sont proportionnels aux nombres de l'un des groupes suivants

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 1, & 1, & -1, & -1, & -1 \\ 3, & 1, & -1, & -1, & -1, & -1 \\ 1, & -1, & \lambda, & -\lambda, & 1-\lambda, & -1-\lambda \\ 1, & -1, & \lambda, & \lambda, & 1-\lambda, & -1-\lambda \\ 1, & 1, & \lambda, & \lambda, & -1-\lambda, & -1-\lambda \end{array}$$

λ étant un nombre quelconque. On vérifie que, pour $n = 3, 4, 5$, toute expression d'ordre n est réductible. Donc, pour $n = 3, 4, 5$, nous savons que l'expression (3) est réductible. Il en est ainsi, très probablement, pour n quelconque. Nous croyons d'ailleurs qu'il existe, pour tout n , un nombre $N(n) < n$ tel que toute expression (1) d'ordre $> N(n)$ est sûrement réductible. La détermination de ce nombre $N(n)$ est un problème algébrique dont la résolution paraît présenter certaines difficultés.

5. — Il reste à démontrer que l'expression (4) est réductible. Nous avons déjà démontré cette propriété dans notre travail antérieur [11]. Nous allons préciser ici nos résultats.

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Si $F^*(1) \neq 0$, il existe une infinité d'entiers positifs p tel que $F^*(x)$, $F^*(x^p)$ soient premiers entre eux.

Ici $F^*(x)$ est le polynôme caractéristique du premier type de l'expression (4). Ce polynôme est de la forme $F^*(x) = \prod_{i=1}^{n'} (x - \sigma_i)^{\mu_i}$, où $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n'}$ sont n' nombres distincts (réels ou complexes) et différents de 1 et $\sum_{i=1}^{n'} \mu_i = n$. Supposons d'abord $|\sigma_i| = 1, i = 1,$

$2, \dots, n'$ et soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n'}$ les arguments, compris entre 0 et 2π ($0 < \theta_i < 2\pi$), des nombres $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n'}$. Supposons, d'une manière générale, que $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j$ soient des racines primitives de l'unité d'ordres $q_1, q_2, \dots, q_j$ respectivement et que les autres σ_i ne soient pas des racines de l'unité. Si σ_r et σ_s ne sont pas tous les deux racines de l'unité on ne peut avoir $p\theta_r \equiv \theta_s \pmod{2\pi}$ qu'au plus pour une valeur de p (> 1). Si σ_r, σ_s sont tous les deux des racines de l'unité on a $p\theta_r \equiv \theta_s \pmod{2\pi}$ si p est un multiple de $q_1 q_2 \dots q_j$. Le lemme en résulte dans ce cas. Il reste à examiner le cas où les σ_i sont quelconque $\neq 1$. Ce cas résulte du précédent puisque si $|\sigma_r|, |\sigma_s|$ ne sont pas tous les deux égaux à 1, on a sûrement $\sigma_r^p \neq \sigma_s$ pour p suffisamment grand.

Considérons maintenant le cas d'un ordre quelconque k . On peut écrire $F^*(x) = (x-1)^k F_1^*(x)$, où $F_1^*(1) \neq 0$. On peut donc trouver un entier p tel que $F_1^*(x)$, $F_1^*(x^p)$ soient premiers entre eux, donc aussi deux polynômes $\phi(x)$, $\psi(x)$ tels que

$$\phi(x) F_1^*(x) + \psi(x) F_1^*(x^p) \equiv 1.$$

Nous en déduisons immédiatement qu'il existe deux polynômes $\phi_1(x)$, $\psi_1(x)$ tels que

$$\phi_1(x) F^*(x) + \psi_1(x) F^*(x^p) \equiv (x^p - 1)^k$$

et nous pouvons énoncer la propriété suivante :

Toute expression (4), d'ordre k , a une conséquente de la forme $\Delta_k^k f(x)$, d'ordre k et de la forme (2).

La réduction précédente à la forme (5) nous montre que si parmi les nombres σ_i il y a au moins $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ qui ont leurs rapports mutuels rationnels, l'expression (1) est réductible. Il en est toujours ainsi si $n = 2$, donc toute expression (1) à trois termes est réductible.

6. — Nous pouvons étendre les résultats précédents au cas de plusieurs variables. Etant donnée une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

de m variables $x_1, x_2, \dots, x_m$, l'opération $\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})}$ a le sens suivant

$$(11) \quad \Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum^* a_{i_1 i_2 \dots i_m} f(\dots, x_j + \alpha_{ji} h_j, \dots)$$

où la sommation $\sum^*$ est étendue aux valeurs $i_1 = 0, 1, \dots, n_1$, $i_2 = 0, 1, \dots, n_2, \dots$, $i_m = 0, 1, \dots, n_m$. Pour abréger l'écriture, nous poserons souvent $f(\dots, \xi_j, \dots)$ au lieu de $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$. Une telle opération est caractérisée par la suite (multiple) des coefficients (réels) $a_{i_1 i_2 \dots i_m}$ et par m suites de pseudo-périodes (réelles) $\alpha_{j0}, \alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn_j}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Chacune de ces suites présente un caractère d'homogénéité. Les $x_1, x_2, \dots, x_m$ et les $h_1, h_2, \dots, h_m$ sont des variables, ce qui précise l'équivalence de deux opérations. Il est encore avantageux de considérer une opération comme ayant un sens seulement si les coefficients ne sont pas tous nuls. On a alors la propriété:

Le produit de deux opérations a toujours un sens, est encore une opération de la même nature et cette multiplication est commutative.

Cette propriété a d'ailleurs lieu non seulement pour les opérations qui opèrent sur toutes les variables mais aussi pour celles qui opèrent sur certaines de ces variables.

Quand nous considérons l'expression générale (11) nous pouvons supposer que $\alpha_{10} = \alpha_{20} = \dots = \alpha_{m0}$ et que $\alpha_{jr} \neq \alpha_{js}$, $r \neq s$, $j = 1, 2, \dots, m$. En ce qui concerne les coefficients, nous pouvons supposer que l'on ait

$$(12) \quad \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} |a_{i_1 i_2 \dots i_m}| \neq 0, \\ i_j = 0, 1, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Examinons quelques cas particuliers. L'expression

$$(13) \quad \Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{(n_1, n_2, \dots, n_m)} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \\ = \sum^* (-1)^{n_1 + n_2 + \dots + n_m - i_1 - i_2 - \dots - i_m} \binom{n_1}{i_1} \binom{n_2}{i_2} \dots \binom{n_m}{i_m} f(\dots, x_j + i_j h_j, \dots)$$

est une différence d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ de la fonction $f(\dots, x_j, \dots)$. On obtient un cas plus général en considérant des opérations de la forme $\Delta_{h_1}^{(a_{1i})} \Delta_{h_2}^{(a_{2i})} \dots \Delta_{h_m}^{(a_{mi})}$, où $\Delta_{h_j}^{(a_{ji})}$ opère sur la variable x_j .

Posons $\phi_j(x) = (x - \alpha_{j0})(x - \alpha_{j1}) \dots (x - \alpha_{jn_j})$, nous avons l'expression

$$(14) \quad \sum^* \frac{f(\dots, x_j + \alpha_{ji} h_j, \dots)}{\phi'_1(\alpha_{1i_1}) \phi'_2(\alpha_{2i_2}) \dots \phi'_m(\alpha_{mi_m})},$$

qui est de cette forme. Une autre expression de cette forme, que nous utiliserons plus loin, est

$$(15) \quad \delta_{h_1}^{(a_{1i})} \delta_{h_2}^{(a_{2i})} \dots \delta_{h_m}^{(a_{mi})} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \\ = \delta_{h_1}^{(a_{1i})} \delta_{h_2}^{(a_{2i})} \dots \delta_{h_m}^{(a_{mi})} f(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

où $\delta_{h_j}^{(a_{ji})}$ est l'opération (5), opérant sur la variable x_j ($h = h_j$, $n = n_j$). Enfin, si $\alpha_{ji} = i$, $i = 0, 1, \dots, n_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, nous avons l'expression

$$(16) \quad \Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{(n_1, n_2, \dots, n_m)} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

où il est maintenant inutile de faire les restrictions (12).

7. — Définissons et précisons maintenant l'ordre d'une expression (11). Cet ordre est $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ où k_j est le minimum des ordres des expressions

$$\sum_{i_j=0}^{n_j} a_{i_1 i_2 \dots i_m} \phi(x + \alpha_{ji} h_j)$$

$$0 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq i_{j-1} \leq n_{j-1}, 0 \leq i_{j+1} \leq n_{j+1}, \dots, 0 \leq i_m \leq n_m.$$

De cette façon, chaque variable x_j contribue par un nombre k_j à la définition de l'ordre. Nous dirons aussi que l'expression a l'ordre simple $[k_j - 1]_j$ par rapport à x_j .

Séparons les variables $x_1, x_2, \dots, x_m$ en deux groupes

$$x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}; x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_m}, \quad j_1 < j_2 < \dots < j_r; j_{r+1} < j_{r+2} < \dots < j_m.$$

Nous employerons des séparations analogues dans la suite. Pour simplifier l'écriture posons n'_s pour n_{j_s} et i'_s pour i_{j_s} . Introduisons alors les notations suivantes (1)

$$\gamma_{i'_1 i'_2 \dots i'_r}^{(v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_m)} = \sum_{i'_{r+1}=0}^{n'_{r+1}} \sum_{i'_{r+2}=0}^{n'_{r+2}} \dots \sum_{i'_m=0}^{n'_m} a_{i_1 i_2 \dots i_m} \alpha_{j_{r+1}}^{v_{r+1}} \alpha_{j_{r+2}}^{v_{r+2}} \dots \alpha_{j_m}^{v_m}.$$

(1) Pour $r=0$ nous avons les nombres $\gamma^{(v_1, v_2, \dots, v_m)}$.

Le nombre k_1 de l'ordre est alors caractérisé par les relations

$$\gamma_{i_2 i_3 \dots i_m}^{(\nu)} = 0, \nu = 0, 1, \dots, k_1 - 1, 0 \equiv i_j \equiv n_j, j = 2, 3, \dots, m$$

$$\sum_{i_2=0}^{n_2} \sum_{i_3=0}^{n_3} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} |\gamma_{i_2 i_3 \dots i_m}^{(k_1)}| \neq 0.$$

Ces relations définissent donc l'ordre simple $[k_1 - 1]$. Nous allons maintenant introduire d'autres ordres, doubles, triples, ... multiples qui caractérisent l'expression (11).

Nous dirons que $[k'_1, k'_2]_{1,2}$ est un ordre double (relatif aux variables x_1, x_2) de l'expression (11) si $k'_1 \geq k_1, k'_2 \geq k_2$ et si

$$(17) \quad \gamma_{i_3 i_4 \dots i_m}^{(\nu_1, \nu_2)} = 0, \nu_1 = 0, 1, \dots, k'_1, \nu_2 = 0, 1, \dots, k'_2, 0 \equiv i_j \equiv n_j, j = 3, 4, \dots, m$$

$$\sum_{i_3=0}^{n_3} \sum_{i_4=0}^{n_4} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} |\gamma_{i_3 i_4 \dots i_m}^{(k'_1+1, k'_2)}| \neq 0, \sum_{i_3=0}^{n_3} \sum_{i_4=0}^{n_4} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} |\gamma_{i_3 i_4 \dots i_m}^{(k'_1, k'_2+1)}| \neq 0.$$

Il est inutile de considérer le cas $k'_1 < k_1$ ou le cas $k'_2 < k_2$, puisque

$$\gamma_{i_3 i_4 \dots i_m}^{(\nu_1, \nu_2)} = \sum_{i_2=0}^{n_2} \gamma_{i_2 i_3 \dots i_m}^{(\nu_1)} \alpha_{2i_2}^{\nu_2} = \sum_{i_1=0}^{n_1} \gamma_{i_1 i_3 \dots i_m}^{(\nu_2)} \alpha_{1i_1}^{\nu_1}$$

et l'égalité (17) est alors une conséquence de la définition de l'ordre.

On détermine les ordres doubles de la manière suivante. Soit $k'_1 (\geq k_1)$ donné et considérons les expressions

$$\sum_{i_2=0}^{n_2} \sum_{i_3=0}^{n_3} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \gamma_{i_2 i_3 \dots i_m}^{(\nu_1)} f(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m), \quad \nu_1 = k_1, k_1 + 1, \dots, k'_1,$$

en convenant de poser, ici et dans la suite, $\xi_s = x_s + \alpha_{si} h_s$. Chacune de ces expressions a un ordre simple, soit $[s^{(\nu_1)}]_2$, par rapport à x_2 . Le minimum du nombre $s^{(\nu_1)}$ est le nombre k'_2 . On voit, en effet, que la définition du nombre k'_2 est identique à la définition (17). On en déduit aussi la propriété suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'expression (11), d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, n'ait pas d'ordres doubles est que les expressions

$$(18) \quad \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_{j-1}=0}^{n_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=0}^{n_{j+1}} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \gamma_{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_m}^{(k_j)} f(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_m)$$

soient d'ordre $(k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_m)$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Réciproquement, si les expressions (18) sont d'ordre $(k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_m)$, l'expression (11) est d'ordre $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_m^*)$ où $k_j^* \leq k_j$.

Nous pouvons définir, en général, les ordres multiples de l'expression (11). Le symbole $[k'_1, k'_2, \dots, k'_r]_{1,2,\dots,r}$ représente un ordre multiple (relatif aux variables $x_1, x_2, \dots, x_r$) si :

1°. Aucun des symboles $[k'_1, \dots, k'_{s-1}, k'_{s+1}, \dots, k'_r]_{1,\dots,s-1,s+1,\dots,r}$, $s = 1, 2, \dots, r$ n'est un ordre $(r-1)$ uple et, plus généralement, aucun des symboles $[k'_i, k'_i, \dots, k'_i]_{i,i,\dots,i}$ n'est un ordre simple. En particulier donc $k'_s \geq k_s$.

2°. On a

$$(19) \quad \gamma_{i_{r+1} i_{r+2} \dots i_m}^{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r)} = 0, \nu_s = 0, 1, \dots, k'_s, s = 1, 2, \dots, r, \\ 0 \equiv i_j \equiv n_j, j = r+1, r+2, \dots, m$$

$$\sum_{i_{r+1}=0}^{n_{r+1}} \sum_{i_{r+2}=0}^{n_{r+2}} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} |\gamma_{i_{r+1} i_{r+2} \dots i_m}^{(k'_1+1, \dots, k'_r)}| \neq 0, s = 1, 2, \dots, r.$$

Une partie des égalités (19) est d'ailleurs une conséquence de l'existence des ordres simples, doubles, ... , $(r-1)$ uples.

On détermine encore très simplement les ordres multiples. Supposons que $[k'_1, k'_2, \dots, k'_{r-1}]_{1,2,\dots,r-1}$ ne soit pas un ordre $(r-1)$ uple. Considérons alors les expressions

$$(20) \quad \sum_{i_r=0}^{n_r} \sum_{i_{r+1}=0}^{n_{r+1}} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \gamma_{i_r i_{r+1} \dots i_m}^{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{r-1})} f(\xi_r, \xi_{r+1}, \dots, \xi_m)$$

$$\nu_1 = k_1, k_1 + 1, \dots, k'_1, \nu_2 = k_2, k_2 + 1, \dots, k'_2, \dots, \nu_{r-1} = k_{r-1}, k_{r-1} + 1, \dots, k'_{r-1}.$$

Chacune a un ordre simple par rapport à x_r . Le minimum de ces ordres est le nombre k'_r . Bien entendu, nous considérons seulement les expressions (20) qui n'ont pas tous leurs coefficients nuls. Il se peut, en effet, par suite de l'existence d'ordres doubles, ... , $(r-1)$ uples, que certaines des expressions (20) n'aient pas de sens.

On voit encore, de proche en proche, que :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'expression (11), d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, n'ait pas d'ordres doubles, triples, ... , multiples est que les expressions

$$(21) \quad \sum_{i'_r=0}^{n'_r} \sum_{i'_{r+1}=0}^{n'_{r+1}} \dots \sum_{i'_m=0}^{n'_m} \gamma_{i'_r i'_{r+1} \dots i'_m}^{(k_j, k_j, \dots, k_{j-r+1})} f(\xi'_j, \xi'_{j+1}, \dots, \xi'_{j_m})$$

soient toutes d'ordres $(k_j, k_j, \dots, k_{j-r+1})$.

Nous appelons l'expression

$$(22) \quad \sum_{i'_{r+1}=0}^{n'_{r+1}} \sum_{i'_{r+2}=0}^{n'_{r+2}} \dots \sum_{i'_m=0}^{n'_m} \gamma_{i'_{r+1} i'_{r+2} \dots i'_m}^{(0, 0, \dots, 0)} f(\xi_{i'_{r+1}}, \dots, \xi_{i'_m})$$

une *r*^{ème} expression dérivée de (11). Cette expression existe seulement si $k_j = 0, k_j = 0, \dots, k_j = 0$.

Nous avons la propriété suivante, que nous utiliserons plus loin :

Si toutes les r^{èmes} expressions dérivées sont d'ordre (0, 0, ..., 0), l'expression (11) elle-même et toutes les s^{èmes} expressions dérivées, avec $s = 1, 2, \dots, r-1$, sont aussi d'ordre (0, 0, ..., 0).

8. — La notion de polynôme caractéristique peut être étendue au cas de m variables. Nous avons le polynôme caractéristique du premier type

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_m} x_1^{a_{1i_1}} x_2^{a_{2i_2}} \dots x_m^{a_{mi_m}},$$

qui dans le cas de l'expression (16) est un polynôme proprement dit. L'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ est alors caractérisé par les relations

$$\left[\frac{\partial^{v_j} F^*}{\partial x_j^{v_j}} \right]_{x_j=1} \equiv 0, \quad v_j = 0, 1, \dots, k_j - 1, \quad \left[\frac{\partial^{k_j} F^*}{\partial x_j^{k_j}} \right]_{x_j=1} \equiv \neq 0$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

l'identité ou la non-identité étant toujours par rapport aux variables restantes.

Par exemple, dans le cas de l'expression (15), nous avons

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n_j} (1 - x_i^{a_{ij}})$$

et cette expression est, par conséquent, d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$.

Le polynôme caractéristique de l'expression dérivée (22) s'obtient de $F^*(x_1, x_2, \dots, x_m)$ en y faisant $x_{j_1} = x_{j_2} = \dots = x_{j_r} = 1$.

Le polynôme caractéristique de l'expression (20) s'obtient en faisant $x_1 = x_2 = \dots = x_{r-1} = 1$ dans

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{(v_1)} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{(v_2)} \dots \left(x_{r-1} \frac{\partial}{\partial x_{r-1}} \right)^{(v_{r-1})} F^*(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

On en déduit facilement que pour l'existence d'un ordre *r*^{uplé}, $[k'_1, k'_2, \dots, k'_r]_{1, 2, \dots, r}$, il est nécessaire que l'on ait

$$\left[\frac{\partial^{v_1 + v_2 + \dots + v_r} F^*}{\partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2} \dots \partial x_r^{v_r}} \right]_{x_1 = x_2 = \dots = x_r = 1} \equiv 0$$

$$v_s = 0, 1, \dots, k'_s, \quad s = 1, 2, \dots, r.$$

Considérons encore l'expression (15). Le polynôme caractéristique de l'expression (22) est alors (à un facteur constant près)

$$\prod_{s=r}^m \prod_{i=1}^{n_{i_s}} (1 - x_i^{a_{is}}) \text{ et on voit donc que :}$$

L'expression (15) n'a pas d'ordres doubles, triples, ... multiples.

On en déduit encore facilement que dans un ordre *r*^{uplé}, $[k'_1, k'_2, \dots, k'_r]_{1, 2, \dots, r}$, il faut que l'on ait $k'_s < n_s$.

9. — Appelons encore expression associée à (11), toute expression de la forme

$$(23) \quad \sum b f(\dots; x_j + \beta_{ji} h_j, \dots)$$

où les b sont les coefficients et les β_{ji} sont de la forme $r^{(j)} x_{j_1} + r^{(j)} x_{j_2} + \dots + r^{(j)} x_{j_{n_j}}$, les $r^{(j)}$ étant des entiers positif ou nuls. Nous dirons alors que le polynôme, à $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ variables,

$$\sum b x_{11}^{r^{(1)}} x_{12}^{r^{(1)}} \dots x_{1n_1}^{r^{(1)}} x_{21}^{r^{(2)}} x_{22}^{r^{(2)}} \dots x_{2n_2}^{r^{(2)}} \dots x_{m1}^{r^{(m)}} x_{m2}^{r^{(m)}} \dots x_{mn_m}^{r^{(m)}},$$

est le polynôme caractéristique du second type de l'expression (23).

En particulier, l'expression (11) elle-même a pour polynôme caractéristique du second type

$$\sum a_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{1i_1} x_{2i_2} \dots x_{mi_{i_m}} (x_{10} = x_{20} = \dots = x_{m0} = 1).$$

Le polynôme caractéristique de l'expression associée (15) est

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n_j} (1 - x_{ij}).$$

On définit encore, comme dans le cas d'une seule variable, les expressions conséquentes à l'aide des polynômes caractéristiques (du premier et du second type).

Démontrons maintenant la généralisation de la propriété du No. 3 :

Toute expression (11) a une conséquente de la forme (15).

Pour ne pas compliquer inutilement, il suffira de donner la démonstration dans le cas de deux variables ($m=2$). Posons alors $n_1=m$, $n_2=n$; le polynome caractéristique peut s'écrire

$$F(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m} | x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}) = \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} x_{2j} \right) x_{1i}.$$

Sous cette forme ce polynome est de la forme $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

du Nr. 2. Les coefficients $\sum_{j=0}^n a_{ij} x_{2j}$, $i=0, 1, \dots, m$ ne sont pas

identiquement nuls. En appliquant la méthode du Nr. 3, on voit que l'expression (11) a une conséquente ayant un polynome caractéristique de la forme

$$G(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}) [V(1, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p})]^2.$$

On peut dans le polynome $G(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$ assimiler chaque terme $a'_{21} x_{21}^{r_1} \dots a'_{2n} x_{2n}^{r_n}$ à une variable x_{2j} et on peut en faire autant pour $[V(1, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p})]^2$. En d'autres mots, l'expression obtenue est associée à une certaine expression qui est elle-même associée à (11) et a un polynome caractéristique de la forme

$$\left(\sum_{j=1}^q a'_j x_{2j} \right) (1-x_{11}) (1-x_{12}) \dots (1-x_{1p}) \quad (x_{20}=1),$$

où on peut supposer les constantes $a'_j \neq 0$. Appliquant encore une fois la méthode d'élimination du Nr. 3, on trouve la propriété cherchée.

On démontre exactement de la même manière la propriété pour m quelconque.

Bien entendu, l'expression de la forme (15) obtenue n'a pas les mêmes α que (11). On peut préciser la forme de cette expression, mais il est inutile de le faire ici.

10. — Nous pouvons dire encore que l'expression (11) est *réductible* si elle a une conséquente de la forme (13) (ou une conséquente équivalente à (13)). On peut chercher comme dans le cas d'une seule variable, des conditions sous lesquelles une expression (11) est réductible, mais nous n'insistons pas sur ce point.

Démontrons seulement la propriété suivante :

Toute expression de la forme (16) est réductible.

Il suffit encore de faire la démonstration pour $m=2$. Soit

$$F^*(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \text{ le polynome caractéristique du premier ty-}$$

pe de l'expression (16). On a, en général, $F^*(x, y) = (1-x)^k (1-y)^{k'} F_1^*(x, y)$, où $F_1^*(x, y)$ n'est divisible ni par $1-x$ ni par $1-y$. L'ordre de l'expression (16) est (k, k') . Les résultats du Nr. 5 nous montrent qu'on peut trouver un entier p et deux polynomes $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$ tels que l'on ait

$$\phi(x, y) F_1^*(x, y) + \psi(x, y) F_1^*(x^p, y) = g(y),$$

$g(y)$ étant un polynome (non identiquement nul) en y . Puisque, par hypothèse, $F_1^*(1, y)$ n'est pas identiquement nul, on en conclut l'existence d'un p pour lequel $F_1^*(x, y)$, $F_1^*(x^p, y)$ sont premiers entre eux (par rapport à x) pour une infinité de valeurs de y (plus exactement sauf peut être pour un nombre fini de valeurs de y). Ceci suffit pour l'établissement de la formule. Ce polynome $g(y)$ est, en général, de la forme $g(y) = y^q (1-y)^{q'} g_1(y)$, $g_1(0) \neq 0$, $g_1(1) \neq 0$. Finalement, on voit donc qu'on peut déterminer deux entiers p, q et les polynomes $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$, $\phi_3(x, y)$, $\phi_4(x, y)$ tels que l'on ait

$$\phi_1(x, y) F^*(x, y) + \phi_2(x, y) F^*(x^p, y) + \phi_3(x, y) F^*(x, y^q) + \phi_4(x, y) F^*(x^p, y^q) = y^{q'} (x^p - 1)^k (y^q - 1)^{k' + p}$$

ce qui démontre la propriété.

La démonstration est analogue dans le cas d'un nombre quelconque de variables.

11. — Dans la définition de l'expression (11) nous avons supposé que les $h_1, h_2, \dots, h_m$ sont des variables indépendantes. On peut au contraire supposer que les h_j ne soient pas linéairement indépendantes. Supposons que

$$(24) \quad h_j = \gamma_{j1} h'_1 + \gamma_{j2} h'_2 + \dots + \gamma_{jk} h'_k, \quad j=1, 2, \dots, m,$$

où les nombres γ_{ji} sont donnés, la matrice (γ_{ji}) est de rang k et les $h'_1, h'_2, \dots, h'_k$ sont des variables indépendantes. Nous désignons alors l'opération correspondante par $\Delta_{h'_1, h'_2, \dots, h'_k}^{(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})}$. Nous dirons qu'une telle opération est de $k^{\text{ème}}$ espèce. De cette façon la notation $\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})}$ signifie une opération de $m^{\text{ème}}$ espèce.

Si nous avons les relations (24), le premier membre de (13) s'écrit $\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_n}^{n_1, n_2, \dots, n_m} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ et nous avons une différence d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ de $k^{\text{ème}}$ espèce.

Nous porterons notre attention tout particulièrement sur les opérations ou sur les expressions de première espèce, les seules que nous étudierons avec plus de détails. Une telle expression peut s'écrire sous la forme

$$(25) \quad \Delta_h^{(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^n a_i f(\dots, x_j + \alpha_{ji} h, \dots).$$

Ici nous pouvons supposer $a_i \neq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_{10} = \alpha_{20} = \dots$

$\dots = \alpha_{m0} = 0$ et $\sum_{j=1}^m |\alpha_{jr} - \alpha_{js}| \neq 0$ si $r \neq s$.

Une expression associée à (25) sera de la forme

$$(26) \quad \sum b f(\dots, x_j + \beta_{ji} h, \dots)$$

où les β_{ji} sont de la forme $r_1 \alpha_{j1} + r_2 \alpha_{j2} + \dots + r_n \alpha_{jn}$, les entiers positifs ou nuls $r_1, r_2, \dots, r_n$, étant les mêmes pour $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \dots, \beta_{mi}$.

Le polynôme caractéristique de (26) est alors $\sum b x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$.

En particulier, le polynôme caractéristique de (25) est

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

On voit qu'il y a une parfaite analogie avec le cas d'une seule variable et que le polynôme caractéristique joue exactement le même rôle que le polynôme caractéristique du second type des expressions à une variable. La seule différence est qu'il y a correspondance simultanée entre les termes du polynôme caractéristique et les valeurs des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. Les propriétés établies plus haut s'appliquent donc ici avec cette dernière précaution. En particulier,

Toute expression de premier espèce (25) a une conséquence de la forme

$$(27) \quad \delta_h^{(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_n} f[\dots, x_j + (i_1 \alpha_{j1} + i_2 \alpha_{j2} + \dots + i_n \alpha_{jn}) h, \dots]$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs $i_r = 0, 1, r = 1, 2, \dots, n$.

Dans les expressions de la forme (27) il faut supposer

$$\sum_{j=0}^m |\alpha_{ji}| \neq 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

Nous étudierons les équations de première espèce dans un autre travail. Les différences de diverses espèces interviendront également dans les problèmes traités au chap. V.

CHAPITRE II

Sur une classe d'équations fonctionnelles à une variable

12. — Nous supposons toujours qu'il s'agit de fonctions $f(x)$, réelles, de la variable réelle x , uniformes et définies dans un intervalle borné et ouvert (a, b) , $a < b$.

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier l'équation fonctionnelle

$$(28) \quad \Delta_h^{(a_i)} f(x) = 0.$$

Nous chercherons les fonctions $f(x)$ qui vérifient l'équation (28) pour toutes les valeurs de x et h telles que $a < x + a_i h < b$, $i = 0, 1, \dots, n$.

En général, nous supposons que les nombres a_i sont distincts, mais il est parfois avantageux de ne pas faire cette restriction. Nous prenons toujours $a_0 = 0$. Quand il s'agit de l'équation générale (28) on peut supposer $a_i \neq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Nous pouvons laisser de côté le cas $n = 1$, quand la solution générale de l'équation est une constante arbitraire ou la fonction identiquement nulle, suivant que l'on a $a_1 + a_0 = 0$ ou $\neq 0$.

L'équation (28) est linéaire et homogène; ses solutions jouissent donc de quelques propriétés immédiates simples telles que: la somme de deux solutions est encore une solution, une solution multipliée par une constante quelconque est aussi une solution etc.

L'importance de la notion d'ordre résulte, tout d'abord, de la propriété suivante, qu'on démontre facilement:

Dans le champ des polynômes, la solution générale de l'équation (28), d'ordre k , est un polynôme quelconque de degré $k-1$.

Un polynôme de degré $k-1$ est une expression de la forme $c_0 x^{k-1} + c_1 x^{k-2} + \dots + c_{k-1}$ où c_i sont des constantes, le premier c_0 pouvant lui aussi être nul. Pour la symétrie nous dirons que la fonction identiquement nulle est un polynôme de degré -1 .

On voit immédiatement que :

Toute fonction vérifiant l'équation (28), vérifie également toute équation conséquente.

On en déduit, en particulier, que :

Toute fonction vérifiant l'équation (28) vérifie également une équation de la forme

$$(29) \quad \delta_h^{(\alpha_i)} f(x) = 0.$$

Toute fonction vérifiant une équation (28) qui est réductible, vérifie également une équation de la forme

$$(30) \quad \Delta_h^n f(x) = 0.$$

13. — Examinons d'abord quelques propriétés générales des solutions de l'équation (28). Supposons toujours $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ et que $|f(x)| < M$ dans (b', b) . En prenant $x + \alpha_1 h = b'$, donc $h = \frac{b' - x}{\alpha_1}$ et $x + \alpha_n h < b$, nous trouvons

$$|f(x)| < \lambda M \quad \text{pour } x > b' - \rho(b - b'),$$

où $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|}{|\alpha_0|}$ et $\rho = \frac{\alpha_1}{\alpha_n - \alpha_1}$. Nous en déduisons facilement que

$$|f(x)| < \lambda^2 M \quad \text{pour } x > b'' - \rho(b - b'') = b' - [(1 + \rho)^2 - 1](b - b')$$

$$|f(x)| < \lambda^3 M \quad \text{pour } x > b''' - \rho(b - b''') = b' - [(1 + \rho)^3 - 1](b - b')$$

$$|f(x)| < \lambda^s M \quad \text{pour } x > b' - [(1 + \rho)^s - 1](b - b').$$

On a posé successivement $b'' = b' - \rho(b - b')$, $b''' = b'' - \rho(b - b'')$, ...

Si s est le plus petit entier positif tel que $(1 + \rho)^s > \frac{b - a}{b - b'}$, on a

$$|f(x)| < \lambda^s M \quad \text{dans } (a, b)$$

et nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

Toute solution de l'équation (28) bornée dans un intervalle partiel, aussi petit que l'on veut, est bornée dans l'intervalle (a, b) .

Dans la démonstration nous avons supposé que la fonction soit bornée dans l'intervalle (b', b) , ce qui ne restreint pas la généralité.

On voit que :

Toute solution de l'équation (28), qui est nulle identiquement dans un sous-intervalle, si petit soit-il, est nulle identiquement dans (a, b) .

On peut énoncer cette propriété aussi sous la forme suivante :

Si deux solutions de l'équation (28) coïncident dans un sous-intervalle, si petit soit-il, elles coïncident partout dans (a, b) .

En particulier :

Toute solution de l'équation (28) qui se réduit à un polynôme dans un sous-intervalle, si petit soit-il, est un polynôme de degré $k-1$ dans (a, b) .

Démontrons encore le lemme suivant :

Toute solution de l'équation (28) qui est nulle presque partout, est nulle identiquement dans l'intervalle (a, b) .

Supposons qu'il existe un point x_0 où $f(x_0) \neq 0$. Faisons varier h entre les limites $\rho \frac{b - x_0}{\alpha_n}$, $\frac{b - x_0}{\alpha_n}$ où $\rho = \max_{i=1, 2, \dots, n-1} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \right) < 1$; alors le point $x_i = x_0 + \alpha_i h$ décrit l'intervalle (x'_i, x''_i) et ces intervalles sont non empiétant et ne contiennent pas le point x_0 (2). A tout point x_1 de (x'_1, x''_1) correspond, de la manière précédente, les points x_i , $i > 1$ dans les intervalles (x'_i, x''_i) respectivement. A tout ensemble E_1 de points de (x'_1, x''_1) correspond un ensemble E_i de (x'_i, x''_i) qui s'obtient de E_1 par une similitude. Soit E_1 l'ensemble, de mesure $x''_1 - x'_1$, des points de (x'_1, x''_1) sur lequel la fonction

est nulle. La relation $\sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) = 0$ nous montre qu'à tout zéro

x_1 de $f(x)$ correspond au moins un x_i , $i > 1$ où la fonction n'est pas nulle. Soit, en général, $E_1^{(0)}$ le sous-ensemble de E_1 sur lequel $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{i-1}) = 0$, $f(x_i) \neq 0$. On a

$$(31) \quad E_1 = E_1^{(2)} + E_1^{(3)} + \dots + E_1^{(n)}.$$

Mais l'ensemble $E_i^{(0)}$ correspondant à $E_1^{(0)}$ est de mesure nulle, il en est donc de même pour $E_1^{(0)}$. La formule (31) est donc absurde. Le lemme énoncé est donc complètement démontré.

(2) Ces conditions ne sont pas d'ailleurs indispensables pour la démonstration.

14. — Les propriétés de l'équation (30) sont bien connues et ont déjà été obtenues presque toutes (3). Nous allons rappeler ces propriétés.

Toute solution continue de l'équation (30) est un polynôme de degré $n-1$.

Le quotient

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{U(x_0, x_1, \dots, x_n; f)}{V(x_0, x_1, \dots, x_n)}$$

est la différence divisée d'ordre n de la fonction $f(x)$ sur les points $x_0, x_1, \dots, x_n$, supposés toujours distincts. Ici $U(x_0, x_1, \dots, x_n; f)$ est le déterminant qu'on déduit du déterminant de Vandermonde $V(x_0, x_1, \dots, x_n)$ en remplaçant les éléments $x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n$ par $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ respectivement. La différence d'ordre n , $\Delta_h^n f(x)$ est, à un facteur indépendant de la fonction près, une différence divisée,

$$\frac{\Delta_h^n f(x)}{n! h^n} = [x, x+h, \dots, x+nh; f].$$

Si la fonction $f(x)$ vérifie l'équation (30), on a aussi

$$(32) \quad [x + r_0 h, x + r_1 h, \dots, x + r_n h; f] = 0,$$

$r_0, r_1, \dots, r_n$ étant des nombres rationnels. Cette formule résulte d'ailleurs d'une relation plus générale [10]. Considérons une suite de points $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ ($k > n$). Toute différence divisée $[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}; f]$ prise sur $n+1$ de ces points est de la forme

$$(33) \quad [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}; f] = \sum_{i=0}^{k-n} A_i [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}; f],$$

$$A_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, k-n, \sum_{i=0}^{k-n} A_i = 1,$$

les A_i étant indépendants de la fonction $f(x)$. Donc, toute différence divisée $[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}; f]$ est une moyenne arithmétique des différences divisées $[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}; f]$, $i = 0, 1, \dots, k-n$.

(3) Pour l'équation (30) se posent encore d'autres problèmes intéressants qui n'ont pas été encore résolus mais dont nous ne nous occuperons pas dans ce travail.

De la formule (32) résulte que $f(x)$ se réduit à un polynôme de degré $n-1$ sur l'ensemble des points qui divisent rationnellement l'intervalle (a, b) . La solution étant supposée continue, la propriété énoncée en résulte. Cette propriété est un cas particulier d'un théorème de M. L. E. J. BROUWER [2]. Une démonstration directe en a été donnée par M. Th. ANGHEUTZA [1].

Démontrons maintenant que :

Toute solution bornée de l'équation (30) est continue dans l'intervalle (a, b) .

Soit, en effet, $m > 1$ un nombre entier positif choisi convenablement. On peut écrire

$$[x, x+h, x+mh, x+2mh, \dots, x+(n-1)mh; f] = 0$$

et, en développant,

$$(34) \quad f(x) - f(x+h) = \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{1}{2m}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n-1)m}\right)} - 1 \right] f(x+h) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{f(x+imh)}{im-1}.$$

La fonction étant supposée bornée, on peut trouver un m suffisamment grand pour que la valeur absolue du second membre soit $< \varepsilon$, et ceci quel que soit $\varepsilon > 0$. On peut ensuite trouver un nombre positif η tel que l'on ait $a < x + (n-1)mh < b$ pour $|h| < \eta$. La formule (34) est alors effectivement applicable et nous donne

$$|f(x) - f(x+h)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |h| < \eta,$$

ce qui prouve la continuité (4).

Nous avons le théorème suivant :

Toute solution bornée de l'équation (30) est un polynôme de degré $n-1$.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général de M. A. MARCHAUD [8], qui généralise celui de M. L. E. J. BROUWER.

(4) On peut d'ailleurs choisir convenablement les nombres m et η de manière que l'on ait

$$|f(x) - f(x+h)| \leq |h| A \quad \text{pour} \quad |h| < \eta,$$

A étant une constante indépendante de h .

Nous avons donc aussi le théorème suivant :

La solution bornée générale d'une équation réductible d'ordre k est un polynôme quelconque de degré $k-1$.

Les diverses propriétés que nous avons établi ont été étudiées, pour l'équation $\Delta_h^2 f(x) = 0$, par DARBOUX [4, 9]. DARBOUX s'occupe de l'équation de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Pour démontrer l'équivalence des deux problèmes il faut d'abord prouver, ce qui n'est pas tout à fait évident, que toute solution de l'équation $\Delta_h^2 f(x) = 0$ dans (a, b) est constituée par les valeurs dans (a, b) d'une solution de cette même équation considérée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Nous pouvons supposer l'intervalle (a, b) fermé et soit alors x un point extérieur à (a, b) et x_0 un point de (a, b) qui divise rationnellement l'intervalle (a, x) . Nous définissons la valeur de la fonction au point x par l'égalité $[a, x_0, x; f] = 0$. De cette façon $f(x)$ est complètement déterminée. On vérifie sans peine que la fonction ainsi définie vérifie l'équation

$$(35) \quad \Delta_h^2 f(x) = 0, \text{ dans } (-\infty, +\infty).$$

Cette propriété nous dit aussi que toute solution de l'équation (35) est complètement déterminée dès qu'on connaît ses valeurs dans un intervalle, si petit soit-il. On voit immédiatement que si $f(x)$ est une solution de l'équation (35), la fonction $f(x) - f(0)$ vérifie l'équation de Cauchy. DARBOUX a aussi démontré qu'il suffit que la fonction soit bornée supérieurement (ou inférieurement) pour tirer la conclusion qu'elle se réduit à un polynôme. Cette propriété n'est plus vraie pour $n > 2$.

15. — L'étude de l'équation générale (28) revient à l'étude des équations de la forme (29). De cette dernière équation nous déduisons

$$\sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{i_2=0}^{r_2} \dots \sum_{i_n=0}^{r_n} \delta_h^{(\alpha_i)} f[x + (i_1 \alpha_1 + i_2 \alpha_2 + \dots + i_n \alpha_n) h] = 0,$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$(36) \quad \delta_h^{(r_1 \alpha_1)} f(x) = 0,$$

où $r_1, r_2, \dots, r_n$ sont des entiers positifs. Toute solution de l'é-

quation (29) vérifie d'ailleurs toute équation (36) où $r_1, r_2, \dots, r_n$ sont des nombres rationnels, positifs ou négatifs.

Considérons maintenant une solution continue de l'équation (29). On peut toujours choisir des nombres rationnels $r_1, r_2, \dots, r_n$ tels que $r_1 \alpha_1, r_2 \alpha_2, \dots, r_n \alpha_n$ soient aussi près que l'on veut de 1. De la continuité résulte alors que :

Toute solution continue de l'équation (29) vérifie aussi l'équation (29) dans laquelle on suppose $\alpha_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$, donc l'équation (30).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toute solution continue de l'équation (28) est un polynôme de degré $k-1$.

Nous pouvons démontrer facilement que ce résultat subsiste encore si on suppose la fonction sommable dans l'intervalle (a, b) .

Soit $f(x)$ une solution sommable de l'équation (28). On sait que l'intégrale indéfinie $g(x) = \int_a^x f(x) dx$ est une fonction continue et dérivable presque partout. De plus on a $g'(x) = f(x)$ presque partout. On voit facilement que si $f(x)$ vérifie l'équation (28), la fonction $g(x)$ vérifie l'équation

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i [g(x + (\alpha_i + 1)h) - g(x + \alpha_i h)] = 0$$

d'ordre $k+1$. Il en résulte que $g(x)$ est un polynôme de degré k , donc que $f(x)$ coïncide presque partout avec un polynôme $P(x)$ de degré $k-1$. La différence $f(x) - P(x)$ vérifie l'équation (28) et est nulle presque partout, donc on peut énoncer, en vertu du lemme du Nr. 13, le théorème suivant :

Toute solution sommable de l'équation (28) est un polynôme de degré $k-1$.

16. — Démontrons maintenant le lemme suivant :

Toute solution mesurable de l'équation (28) est bornée dans l'intervalle (a, b) .

Supposons le contraire. Soit donc $f(x)$ une solution mesurable non bornée. D'après les résultats du Nr. 13, cette fonction n'est bornée dans aucun sous-intervalle. Dans tout sous-intervalle il existe donc au moins un point ξ où $|f(\xi)| > A$, quel que soit le nombre positif A .

Supposons toujours $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$. Soit c le milieu de l'intervalle (a, b) et a_1, b_1 les milieux des intervalles (a, c) (c, b) .

Etant donné un nombre positif A , il existe dans l'intervalle (a_1, b_1) un point ξ où

$$(37) \quad |f(\xi)| > \frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|}{|a_0|} A.$$

Prenons $\max_{i=1, 2, \dots, n-1} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \right) = \rho < 1$ et soient $h' = \frac{(b-a)}{4\alpha_n}$, $h'' = \frac{b-a}{4\alpha_n}$.
 $x'_i = \xi + \frac{\alpha_i \rho}{4\alpha_n} (b-a)$, $x''_i = \xi + \frac{\alpha_i (b-a)}{4\alpha_n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Les intervalles (x'_i, x''_i) sont alors non empiétants et ne contiennent pas le point ξ . Soit h un nombre compris entre h' et h'' . En posant $x_i = \xi + \alpha_i h$, le point x_i est dans l'intervalle (ouvert) (x'_i, x''_i) et l'égalité

$$f(\xi) = - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)}{a_0}$$

nous montre qu'il faut que l'on ait $|f(x_i)| > A$ pour au moins une valeur de i . Autrement l'inégalité (37) serait impossible. Les points x_i se correspondent par similitude dans les intervalles (x'_i, x''_i) . Soit E_1 l'ensemble des points de l'intervalle (x'_1, x''_1) où l'on a $|f(x_1)| > A$. Soit E_2 l'ensemble des points de (x'_1, x''_1) où $|f(x_1)| \leq A$, $|f(x_2)| > A$, les points x_1, x_2 étant deux points correspondants dans (x'_1, x''_1) , (x'_2, x''_2) et soit E_2^* l'ensemble de ces points x_2 . D'une manière générale, soit E_i l'ensemble des points de (x'_1, x''_1) où $|f(x_1)| \leq A$, $|f(x_2)| \leq A, \dots, |f(x_{i-1})| \leq A$, $|f(x_i)| > A$, les points $x_1, x_2, \dots, x_i$ étant des points correspondants dans les intervalles (x'_1, x''_1) , $(x'_2, x''_2), \dots, (x'_i, x''_i)$ et soit E_i^* l'ensemble de ces points x_i . Tous ces ensembles sont mesurables, en vertu des propriétés bien connues de la mesure et des fonctions mesurables. En désignant par $|E|$ la mesure de l'ensemble E , on a

$$|E_1| + |E_2| + \dots + |E_n| = x''_1 - x'_1 = \frac{\alpha_1(b-a)(1-\rho)}{4\alpha_n}$$

puisque

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n = \text{l'intervalle ouvert } (x'_1, x''_1).$$

Mais, la mesure de l'ensemble sur lequel on a $|f(x)| > A$ est au moins $|E_1| + |E_2^*| + \dots + |E_n^*|$. Or, $|E_i^*| = \frac{\alpha_i}{\alpha_1} |E_i| > |E_i|$, donc on a

$$|f(x)| > A \geq \frac{\alpha_1(b-a)(1-\rho)}{4\alpha_n} = \text{nombre positif fixe,}$$

le premier membre désignant la mesure de l'ensemble des x pour lesquels $|f(x)| > A$. Cette inégalité étant vraie quel que soit A , la fonction ne peut être mesurable, en vertu d'un théorème de M. E. BOREL (5). Cette contradiction démontre le lemme énoncé.

Toute fonction mesurable et bornée est sommable, donc nous avons, finalement, le théorème suivant :

La solution mesurable générale de l'équation (28), d'ordre k , est un polynôme quelconque de degré $k-1$.

C'est la généralisation du théorème de M. W. SIERPINSKI, qui a considéré l'équation (30) pour $n=2$ [12]. Nous avons déjà donné cette propriété pour l'équation (30) et n quelconque [10]. La démonstration précédente est d'ailleurs analogue à celle de M. W. SIERPINSKI (6).

17. — Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction $f(x)$ soit définie dans un intervalle (a, b) . Pour la suite il y a intérêt à considérer aussi un cas un peu plus général. Supposons la fonction définie sur un ensemble E , contenu dans (a, b) et de mesure $b-a$. L'équation (28) doit alors être satisfaite pour toutes les valeurs de x et h telles que $x + \alpha_i h$, $i=0, 1, \dots, n$ appartiennent à l'ensemble E . Supposons encore $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ et faisons sur la structure de l'équation (28) la remarque que si le point x appartient à l'ensemble E , tous les points $x + \alpha_i h$, $i=1, 2, \dots, n$ appartiennent aussi à E pour presque toutes les valeurs de h vérifiant les égalités $a < x + \alpha_i h < b$, $i=1, 2, \dots, n$. La démonstration est immédiate. Le nombre h varie dans l'intervalle $\left(-\frac{x-a}{\alpha_n}, \frac{b-x}{\alpha_n} \right)$. Soit e_i l'ensemble des h pour lesquels $x + \alpha_i h$ n'appartient pas à E . Les ensembles e_i sont de mesure nulle, il en est donc de même pour leur somme et la propriété en résulte. On voit aussi que pour tout h (tel que $|\alpha_n h| < b-a$), les points $x + \alpha_i h$, $i=0, 1, \dots, n$ appartiennent à E pour presque toutes les valeurs de x vérifiant les inégalités $a < x + \alpha_i h < b$, $i=0, 1, \dots, n$.

Nous avons maintenant les propriétés suivantes :

Toute fonction, définie sur E , qui vérifie l'équation (28) et qui est nulle presque partout, est nulle identiquement sur E .

La démonstration est analogue à celle donnée dans le cas où E est un intervalle (Nr. 13).

(5) D'après ce théorème si $f(x)$ est mesurable, à tout $\epsilon > 0$ correspond un nombre A tel que l'on ait $|f(x)| > A \mid < \epsilon$, $|f(x)| < -A \mid < \epsilon$.

(6) En ce qui concerne l'équation de Cauchy, ainsi que la bibliographie de cette question, voir les travaux de M. W. SIERPINSKI dans le tome I des *Fundamenta Mathematicae*.

Toute solution de l'équation (28), sommable sur E , est un polynôme de degré $k-1$.

Considérons encore l'intégrale indéfinie $g(x) = \int_a^x f(x) dx$, qui est une fonction continue de x dans l'intervalle (a, b) . On voit facilement que la fonction $g(x)$ vérifie encore l'équation

$$\sum_{i=0}^n a_i [g(x + (\alpha_i + 1)h) - g(x + \alpha_i h)] = 0$$

dans l'intervalle (a, b) . Le reste de la démonstration se fait exactement comme au Nr. 15. Tout ceci réussit à cause de la propriété de pouvoir négliger les ensembles de mesure nulle dans l'intégration au sens de M. LEBESGUE.

Toute solution de l'équation (28), qui est bornée sur la partie de E appartenant à un sous-intervalle de (a, b) , si petit soit-il, est bornée sur E .

La propriété se démontre en suivant la démonstration du Nr. 13. Remarquons seulement que dans cette démonstration on ne pourra pas prendre toujours $h = \frac{b'-x}{\alpha_1}$, car il se peut que l'expression $\Delta_h^{(\alpha_i)} f(x)$ ne soit pas définie pour cet h . Mais on peut toujours prendre $h > \frac{b'-x}{\alpha_1}$ et aussi près que l'on veut de $\frac{b'-x}{\alpha_1}$ pour lequel $\Delta_h^{(\alpha_i)} f(x)$ est définie et nous avons encore

$$|f(x)| < M \text{ pour } E \ni x > b' - \rho(b-b'), \dots \text{ etc.}$$

Toute solution mesurable de l'équation (28) est bornée sur E .

La démonstration de cette propriété se fait comme au Nr. 16.

Enfin, le théorème final du Nr. précédent subsiste encore,

La solution mesurable générale de l'équation (28), sur l'ensemble E , est un polynôme quelconque de degré $k-1$.

On le démontre exactement comme plus haut.

En résumé, toutes les propriétés étudiées pour le cas d'un intervalle restent vraies si on exclut de cet intervalle un ensemble de mesure nulle.

Cette extension a bien réussi à cause des propriétés bien connues des ensembles de mesure nulle et surtout à cause de cette propriété que tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle est encore mesurable et de mesure nulle.

CHAPITRE III

Sur les pseudo-polynômes de deux ou de plusieurs variables

18. — Nous considérons des fonctions $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ réelles, de m variables réelles $x_1, x_2, \dots, x_m$, uniformes et définies dans un domaine borné et ouvert D . Le point $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ est rapporté à un système d'axes de coordonnées $Ox_1 x_2 \dots x_m$, que nous pouvons supposer rectangulaires. Soit D_1 un hyper-parallélépipède complètement intérieur à D (donc tous les points du domaine fermé D_1 appartiennent à D) et ayant ses faces parallèles aux hyperplans de coordonnées. A tout point P de D correspond une suite de hyperparallélépipèdes $D_1, D_2, \dots, D_s$ jouissant des propriétés suivantes :

1°. tous les D_i ont leurs faces respectives parallèles et sont complètement intérieurs à D .

2°. les domaines ouverts D_i, D_{i+1} ont une partie commune, $i = 1, 2, \dots, s-1$.

3°. le point P est à l'intérieur de D_s .

Nous désignons par R l'hyperparallélépipède minimum contenant D et ayant ses faces parallèles aux hyperplans des coordonnées. R est donc le domaine défini par les inégalités $a_i < x_i < b_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Le plus souvent on peut d'ailleurs supposer que D coïncide avec R et on peut alors aussi supposer, sans grand inconvénient, que ce domaine soit fermé.

Les propriétés précédentes restent valables si nous prenons au lieu des axes $Ox_1 x_2 \dots x_m$, un nouveau système d'axes $Ox'_1 x'_2 \dots x'_m$, formant un véritable m -èdre. Au chap. V nous ferons grand usage des changements d'axes.

Pour mieux comprendre les questions qui vont suivre nous commencerons par les propriétés des pseudo-polynômes de deux variables.

19. — Rappelons la définition des différences divisées partielles de la fonction $f(x, y)$. Appelons, avec M. A. MARCHAUD [8], un réseau d'ordre (m, n) un système formé par $m+1$ droites parallèles à l'axe Oy et $n+1$ droites parallèles à l'axe Ox . Nous supposerons que les droites formant le réseau sont distinctes. Toute droite du réseau est caractérisée par son abscisse si elle est parallèle à l'axe Oy et par son ordonnée si elle est parallèle à l'axe Ox . Plus

explicitement nous pouvons désigner un réseau d'ordre (m, n) par

$$(38) \quad (x_0, x_1, \dots, x_m | y_0, y_1, \dots, y_n),$$

mettant en évidence les abscisses et les ordonnées des droites composantes. Les droites qui forment le réseau (38) se coupent en $N = (m+1)(n+1)$ points qui sont les *noeuds* de ce réseau. Il va sans dire que dans la suite il suffit de considérer seulement les parties des droites composantes du réseau, comprises dans le domaine D envisagé dans chaque problème. En particulier nous ne considérons que des réseaux dont les noeuds sont compris dans D .

Considérons le réseau (38) et désignons par $M_1, M_2, \dots, M_N$ les noeuds de ce réseau, donc les points (x_i, y_j) , $i=0, 1, \dots, m$, $j=0, 1, \dots, n$. Désignons par $V_{m,n}(M_1, M_2, \dots, M_N)$ le déterminant d'ordre N dont la ligne générale est formée par les éléments $x_i^r y_j^s$, $r=0, 1, \dots, m$, $s=0, 1, \dots, n$ et soit $U_{m,n}(M_1, M_2, \dots, M_N; f)$ le déterminant qu'on déduit du précédent en remplaçant les éléments $x_i^m y_j^n$ par $f(x_i, y_j)$ respectivement, $i=0, 1, \dots, m$, $j=0, 1, \dots, n$. Par définition, la différence divisée partielle d'ordre (m, n) de la fonction $f(x, y)$ sur les points $M_1, M_2, \dots, M_N$, ou sur le réseau (38), est égale au quotient

$$(39) \quad \frac{U_{m,n}(M_1, M_2, \dots, M_N; f)}{V_{m,n}(M_1, M_2, \dots, M_N)}$$

qui a bien un sens puisque le dénominateur est $\neq 0$. Changeant un peu notre notation antérieure [10], nous désignerons l'expression (39) par

$$[x_0, x_1, \dots, x_m | y_0, y_1, \dots, y_n; f].$$

On peut mettre cette différence divisée sous une forme qui permet de mieux voir sa structure. Soit $\phi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)$, $\psi(y) = (y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_n)$, nous avons

$$(40) \quad [x_0, x_1, \dots, x_m | y_0, y_1, \dots, y_n; f] = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{f(x_i, y_j)}{\phi'(x_i)\psi'(y_j)}.$$

Cette forme justifie complètement la dénomination de différence divisée partielle car elle n'est qu'une superposition de différences divisées prises successivement par rapport aux variables x, y . Si nous posons $x + \alpha_i h_1$ et $y + \beta_j h_2$ au lieu de x_i et y_j , l'expression est, à un facteur indépendant de la fonction près, de la forme (14).

La différence d'ordre (m, n) , $\Delta_{h_1, h_2}^{m, n} f(x, y)$ est, à un facteur indépendant de la fonction près, une différence divisée d'ordre (m, n)

$$\frac{1}{m!n!h_1^m h_2^n} \Delta_{h_1, h_2}^{m, n} f(x, y) = [x, x+h_1, \dots, x+mh_1 | y, y+h_2, \dots, y+nh_2; f].$$

Le réseau correspondant est formé par des droites équidistantes.

Si nous faisons $h_1 = h_2 = h$, la différence précédente devient $\Delta_h^{m, n} f(x, y)$ donc une différence d'ordre (m, n) de première espèce. On peut dire que toute différence de seconde espèce contient une différence de première espèce. De cette façon, certaines des propriétés que nous énoncerons plus loin pour les différences de première espèce restent à fortiori vraies pour celles de seconde espèce.

Considérons le réseau

$$(41) \quad (x_0, x_1, \dots, x_{m_1} | y_0, y_1, \dots, y_{n_1}),$$

d'ordre (m_1, n_1) , où $m_1 \geq m$, $n_1 \geq n$, $m_1 + n_1 > m + n$. La forme (40) de la différence divisée partielle, nous montre que :

Toute différence divisée partielle d'ordre (m, n) , prise sur $(m+1)(n+1)$ points choisis parmi les noeuds du réseau (41), est une moyenne arithmétique des différences divisées partielles

$$\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m} | y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+n}; f\},$$

$$i=0, 1, \dots, m_1-m, j=0, 1, \dots, n_1-n.$$

Les différences divisées partielles ont été définies par rapport aux axes de coordonnées Oxy . Prenant un nouveau système d'axes $Ox'y'$ on définit de la même manière les réseaux et les différences divisées partielles par rapport à ces axes. On peut écrire immédiatement ces différences divisées, par exemple sous la forme (40), qui est particulièrement commode.

20. — Appelons, toujours d'après M. A. MARCHAUD [8], *pseudo-polynôme d'ordre (m, n)* , toute expression de la forme

$$(42) \quad \sum_{i=0}^m x^i A_i(y) + \sum_{j=0}^n y^j B_j(x),$$

où $A_i(y)$ sont des fonctions de y seule et $B_j(x)$ des fonctions de x seule (de la forme indiquée au début du Nr. 12). Nous les appellerons *coefficients* du pseudo-polynôme. On convient d'appeler pseudo-polynôme d'ordre $(-1, n)$ un polynôme de degré n en y ,

pseudo-polynôme d'ordre $(m, -1)$ un polynôme de degré m en x et pseudo-polynôme d'ordre $(-1, -1)$ la fonction identiquement nulle.

La différence divisée partielle d'ordre (m, n) d'un pseudo-polynôme d'ordre $(m-1, n-1)$ est nulle identiquement.

On en déduit immédiatement que :

Un pseudo-polynôme d'ordre (m, n) est complètement déterminé si on connaît ses valeurs sur un réseau d'ordre (m, n) .

Dans l'étude des pseudo-polynômes il suffit de supposer que le domaine D se réduit au rectangle R . Ceci résulte aussi d'une sorte de propriété de prolongement qui est à peu près évidente. Supposons que $f(x, y)$ soit un pseudo-polynôme d'ordre (m, n) dans chacun des rectangles D_1, D_2 . Si ces domaines (ouverts) ont une partie commune, il en résulte immédiatement que $f(x, y)$ est un pseudo-polynôme d'ordre (m, n) dans le domaine formé par la réunion des rectangles D_1, D_2 . Pour le voir il suffit de prendre un réseau d'ordre (m, n) dont les noeuds appartiennent à la partie commune de D_1, D_2 .

Nous avons aussi la propriété réciproque :

Toute fonction $f(x, y)$ dont la différence divisée partielle d'ordre (m, n) est nulle identiquement est un pseudo-polynôme d'ordre $(m-1, n-1)$.

Certaines des propriétés du pseudo-polynôme se reflètent sur ses coefficients. Ainsi :

Si le pseudo-polynôme (42) est borné dans le rectangle R , ses coefficients sont des fonctions bornées dans les intervalles $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ respectivement.

Supposons que pour le pseudo-polynôme $f(x, y)$, d'ordre (m, n) , on ait $|f(x, y)| < M$. Donnons à $x, m+1$ valeurs distinctes $x_0, x_1, \dots, x_m$ et écrivons le système

$$(43) \quad \sum_{i=0}^m x_i^r A_i(y) + \sum_{j=0}^n y^j B_j(x_r) = f(x_r, y), \quad r=0, 1, \dots, m.$$

On peut déterminer un nombre M' tel que l'on ait

$$\left| f(x_r, y) - \sum_{j=0}^n y^j B_j(x_r) \right| < M', \quad r=0, 1, \dots, m,$$

quel que soit y . Résolvant le système (43) par rapport aux coefficients $A_i(y)$, on déduit la propriété énoncée pour ces coefficients.

On procède de la même manière pour montrer que les $B_j(x)$ sont bornées. Cette propriété n'est pas vraie, ainsi d'ailleurs que les suivantes, pour les pseudo-polynômes de plus de deux variables. Nous verrons un peu plus loin comment il faut les modifier. De la relation

$$[x, x_0, x_1, \dots, x_m | y, y_0, y_1, \dots, y_n; f] = 0$$

nous déduisons d'ailleurs qu'on peut écrire un pseudo-polynôme d'ordre (m, n) sous la forme suivante

$$(44) \quad f(x, y) = \sum_{i=0}^m \frac{\phi(x) f(x_i, y)}{(x-x_i) \phi'(x_i)} + \sum_{j=0}^n \frac{\psi(y) f(x, y_j)}{(y-y_j) \psi'(y_j)} + \\ + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{\phi(x) \psi(y) f(x_i, y_j)}{(x-x_i)(y-y_j) \phi'(x_i) \psi'(y_j)},$$

où $\phi(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_m)$, $\psi(y) = (y-y_0)(y-y_1) \dots (y-y_n)$. Les coefficients correspondants de deux pseudo-polynômes identiques ne diffèrent que par des polynômes en x et y . La propriété précédente résulte ainsi de la simple inspection de la formule (44). On voit encore que :

Si un pseudo-polynôme est continue ses coefficients sont des fonctions continues.

La réciproque de cette propriété est évidemment vraie.

Disons qu'une fonction est linéairement mesurable si elle est mesurable par rapport à chacune des variables x et y séparément. Une fonction mesurable $f(x, y)$ n'est pas, en général, linéairement mesurable mais, d'après un théorème de M. G. FUBINI [6], toute fonction mesurable est une fonction mesurable de x pour presque tous les y et une fonction mesurable de y pour presque tous les x . Considérons maintenant un pseudo-polynôme mesurable. Ce pseudo-polynôme est mesurable sur $m+1$ parallèles à l'axe Oy et sur $n+1$ parallèles à l'axe Ox et on en déduit que :

Les coefficients d'un pseudo-polynôme mesurable sont des fonctions mesurables.

Réciproquement :

Si les coefficients d'un pseudo-polynôme sont mesurables ce pseudo-polynôme est mesurable.

En effet, si $\phi(x)$ et $\psi(y)$ sont des fonctions mesurables, leur produit $\phi(x) \psi(y)$ est une fonction mesurable (superficiellement) par rapport à x et y .

D'ailleurs tout pseudo-polynome mesurable est linéairement mesurable et réciproquement. Il est clair aussi que si un pseudo-polynome est mesurable B ses coefficients sont mesurables B et réciproquement.

21. — Les droites du réseau (41) se divisent rationnellement si les points $x_0, x_1, \dots, x_m$ ainsi que les points $y_0, y_1, \dots, y_n$ se divisent rationnellement. Il est clair maintenant ce qu'il faut entendre par un réseau qui se divise rationnellement et qui est partout dense dans le rectangle R. Les droites du réseau parallèles à l'axe Oy respectivement à l'axe Ox se divisent rationnellement et ont des abscisses respectivement des ordonnées denses dans les intervalles $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$. Bien entendu un tel réseau n'est pas d'un ordre déterminé. C'est un réseau infini et plus exactement un réseau doublement infini. Nous avons alors la propriété suivante :

Si une différence d'ordre (m, n) de première espèce de la fonction $f(x, y)$ est nulle identiquement dans R, on peut construire un réseau qui se divise rationnellement et qui est partout dense dans R tel que toute différence divisée partielle d'ordre (m, n) , prise sur $(m+1)(n+1)$ points choisis parmi les noeuds de ce réseau, soit nulle.

On peut construire le réseau partout dense de la manière suivante. Les abscisses des droites parallèles à Oy sont $a_1 + h$, où h est rationnel (> 0) et les ordonnées des droites parallèles à Ox sont $a_2 + h'$, où h' est rationnel (> 0). Les nombres h et h' sont choisis tels que l'on ait $a_1 + h < b_1, a_2 + h' < b_2$. La propriété résulte du fait que la fonction se réduit à un pseudo-polynome d'ordre $(m-1, n-1)$ sur tout ensemble formé par les noeuds d'un réseau qui se divise rationnellement.

La forme générale d'une différence de première espèce est en réalité

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (-1)^{m+n-i-j} \binom{m}{i} \binom{n}{j} f(x + ih, y + jah).$$

Nous avons supposé $\alpha=1$, ce qui ne restreint pas la généralité. En effet, on revient à ce cas par une transformation simple (dilatation) faite sur la variable y .

On en déduit immédiatement que :

Si une différence d'ordre (m, n) de première espèce de la fonction continue $f(x, y)$ est nulle identiquement, la différence

divisée partielle d'ordre (m, n) est nulle identiquement dans D. La fonction se réduit donc dans D à un pseudo-polynome d'ordre $(m-1, n-1)$.

Cette propriété résulte du fait qu'étant donné un réseau d'ordre (m, n) , on peut construire un autre réseau qui se divise rationnellement tel que les noeuds correspondants de ces deux réseaux soient aussi près que l'on veut.

Considérons l'équation fonctionnelle de seconde espèce

$$(45) \quad \Delta_{h_1, h_2}^{m, n} f(x, y) = 0,$$

dans le domaine D, que nous pouvons supposer coïncidant avec R. Nous avons le théorème suivant, dû à M. A. MARCHAUD [8] :

Toute solution bornée de l'équation (45) est un pseudo-polynome d'ordre $(m-1, n-1)$ dans R.

La démonstration est immédiate. Il suffit de démontrer que si $f(x, y)$ est nulle sur un réseau d'ordre $(m-1, n-1)$, elle est nulle identiquement. Posant

$$g(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x, y + jh_2)$$

on a $\Delta_{h_1}^m g(x) = 0$, donc $g(x)$ est un polynome de degré $m-1$ en x qui, étant nul pour m valeurs de x , est nul identiquement. La relation $g(x) \equiv 0$ nous montre que $f(x, y)$ est un polynome de degré $n-1$ en y qui, étant nul pour n valeurs de y , est nul identiquement.

L'énoncé précédent est, bien entendu, valable aussi pour le domaine quelconque D.

22. — Les questions exposées plus haut peuvent être étendues aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Un réseau d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ est un système de $n_i + 1$ hyperplans parallèles à l'hyperplan de coordonnées $Ox_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_m$, $i = 1, 2, \dots, m$. Tout hyperplan du réseau est caractérisé par l'abscisse de son point d'intersection avec le $m^{\text{ème}}$ axe de coordonnées. Mettant en évidence les abscisses des hyperplans constitutifs, on peut désigner un réseau d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ par

$$(46) \quad (x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1n_1} | x_{20}, x_{21}, \dots, x_{2n_2} | \dots | x_{m0}, x_{m1}, \dots, x_{mn_m}).$$

Les $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_m + 1)$ points $(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots, x_{mi_{m_i}})$, $i_1 = 0, 1, \dots, n_1$, $i_2 = 0, 1, \dots, n_2, \dots, i_m = 0, 1, \dots, n_m$ sont les noeuds du réseau (46).

La différence divisée partielle d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ sur le réseau (46) a une définition analogue que pour deux variables. Nous désignerons cette différence divisée par

$$(47) \quad [x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1n_1} | x_{20}, x_{21}, \dots, x_{2n_2} | \dots | x_{m0}, x_{m1}, \dots, x_{mn_m}; f]$$

et si nous posons $\phi_j(x) = (x - x_{j0})(x - x_{j1}) \dots (x - x_{jn_j})$, la différence divisée (47) peut aussi s'écrire

$$(48) \quad \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \frac{f(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots, x_{mi_{m_i}})}{\phi'_1(x_{1i_1}) \phi'_2(x_{2i_2}) \dots \phi'_m(x_{mi_{m_i}})}$$

qui justifie complètement la dénomination de différence divisée partielle.

La différence d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ est, à un facteur indépendante de la fonction près, une différence divisée partielle d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$.

$$\frac{1}{n_1! n_2! \dots n_m! h_1^{n_1} h_2^{n_2} \dots h_m^{n_m}} \Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{n_1, n_2, \dots, n_m} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \\ = [x_1, x_1 + h_1, \dots, x_1 + n_1 h_1 | x_2, x_2 + h_2, \dots, x_2 + n_2 h_2 | \dots \\ \dots | x_m, x_m + h_m, \dots, x_m + n_m h_m; f].$$

Le réseau correspondant est donc formé par d'hyperplans équidistants.

Toute différence d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ de $k^{\text{ème}}$ espèce contient une différence d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ de $(k-1)^{\text{ème}}$ espèce donc, en particulier, une différence d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ de première espèce. De cette façon les propriétés signalées plus loin pour les différences de première espèce seront vraie à fortiori pour celles de $2^{\text{ème}}$, $3^{\text{ème}}$, ..., $m^{\text{ème}}$ espèce.

Nous avons encore la propriété:

Toute différence divisée partielle d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$, prise sur $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_m + 1)$ points choisis parmi les noeuds du réseau

$$(x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1k_1} | x_{20}, x_{21}, \dots, x_{2k_2} | \dots | x_{m0}, x_{m1}, \dots, x_{mk_m}) \\ k_1 \geq n_1, k_2 \geq n_2, \dots, k_m \geq n_m, k_1 + k_2 + \dots + k_m > n_1 + n_2 + \dots + n_m$$

est une moyenne arithmétique des différences divisées

$$[x_{1i_1}, x_{1i_1+1}, \dots, x_{1i_1+n_1} | x_{2i_2}, x_{2i_2+1}, \dots, x_{2i_2+n_2} | \dots | x_{mi_m}, x_{mi_m+1}, \dots, x_{mi_m+n_m}; f] \\ i_1 = 0, 1, \dots, k_1 - n_1, i_2 = 0, 1, \dots, k_2 - n_2, \dots, i_m = 0, 1, \dots, k_m - n_m.$$

On peut définir les réseaux et les différences divisées partielles par rapport à un système d'axes quelconques $Ox'_1, x'_2, \dots, x'_m$. On peut écrire immédiatement ces différences divisées par exemple sous la forme (48).

23. — Un pseudo-polynôme d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ est une expression de la forme

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{n_j} x_j^i A_{ji}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m)$$

où les coefficients A_{ji} sont des fonctions dépendant des variables $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m$ seules.

Si dans l'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ on a $n_j = -1$ on convient que les A_{ji} , $i = 0, 1, \dots, n_j$, sont tous nuls identiquement. En particulier, le pseudo-polynôme d'ordre $(-1, -1, \dots, -1)$ est la fonction identiquement nulle.

Nous avons les propriétés suivantes:

La différence divisée partielle d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ d'un pseudo-polynôme d'ordre $(n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_m - 1)$ est nulle identiquement.

Un pseudo-polynôme d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ est complètement déterminé si on connaît ses valeurs sur un réseau d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$.

Dans l'étude des pseudo-polynômes nous pouvons supposer que D coïncide avec un hyperparallélépipède R. L'explication se fait comme dans le cas de deux variables.

Toute fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ dont la différence divisée partielle d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ est nulle identiquement, est un pseudo-polynôme d'ordre $(n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_m - 1)$.

Nous avons déjà dit que les propriétés du Nr. 20 ne s'étendent pas, sans modifications, aux pseudo-polynômes de plus de deux variables. Considérons, par exemple, le pseudo-polynôme

$$f(x, y, z) = A(x, y) + B(y, z) + C(z, x),$$

d'ordre $(0, 0, 0)$, de trois variables x, y, z . Si $f(x, y, z)$ est bornée les coefficients A, B, C ne sont pas nécessairement bornés.

Ceci résulte du fait que ces coefficients ne sont pas complètement déterminés par le pseudo-polynôme considéré. Plus exactement le pseudo-polynôme

$$[A(x, y) + \phi(x)] + B(y, z) + [C(z, x) - \phi(x)],$$

où $\phi(x)$ est une fonction quelconque de x , est identique à $f(x, y, z)$.

Pour un pseudo-polynôme d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ nous pouvons écrire

$$(49) [x_1, x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1n_1} | x_2, x_{20}, x_{21}, \dots, x_{2n_2} | \dots | x_m, x_{m0}, x_{m1}, \dots, x_{mn_m}; f] = 0$$

où x_{ji} sont des valeurs fixes et $x_1, x_2, \dots, x_m$ les variables. De cette relation nous pouvons tirer la valeur de $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Cette formule donne comme coefficients du pseudo-polynôme des expressions linéaires par rapport à des fonctions de 1, 2, $\dots$, ou $m-1$ variables qui s'obtiennent en fixant, dans la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $m-1, m-2, \dots$ ou 1 des variables. Les coefficients de deux pseudo-polynômes identiques diffèrent par des pseudo-polynômes en $m-1$ des variables $x_1, x_2, \dots, x_m$. Lorsque $m > 2$ les coefficients d'un pseudo-polynôme sont déterminés à des expressions près qui contiennent des fonctions arbitraires. La relation (49) nous montre toutefois qu'on a les propriétés suivantes.

On peut écrire les coefficients d'un pseudo-polynôme borné de manière que ces coefficients soient des fonctions bornées dans leur domaine d'existence.

On peut écrire les coefficients d'un pseudo-polynôme continu de manière que ces coefficients soient des fonctions continues dans leur domaine d'existence.

Disons qu'une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ est linéairement mesurable si elle est mesurable par rapport à chacune des variables $x_1, x_2, \dots, x_m$. Par exemple, toute fonction mesurable B est linéairement mesurable B .

Pour ne pas compliquer inutilement notre exposition considérons seulement des pseudo-polynômes linéairement mesurables. Nous avons alors la propriété suivante:

On peut écrire les coefficients d'un pseudo-polynôme linéairement mesurable de manière que ces coefficients soient des fonctions linéairement mesurables dans leur domaine d'existence.

Réciproquement:

Si les coefficients d'un pseudo-polynôme sont linéairement mesurables ce pseudo-polynôme est linéairement mesurable.

Si le pseudo-polynôme est mesurable B , on peut écrire ses coefficients de manière qu'ils soient des fonctions mesurables B et réciproquement.

24. — Les propriétés du Nr. 21 se généralisent immédiatement. Il suffit ici d'énoncer ces propriétés.

Si une différence d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ de première espèce de la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ est nulle identiquement dans R , on peut construire un réseau qui se divise rationnellement et qui est partout dense dans R tel que toute différence divisée partielle d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$, prise sur $(n_1+1)(n_2+1) \dots (n_m+1)$ points choisis parmi les noeuds de ce réseau, soit nulle.

Si une différence d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ de première espèce de la fonction continue $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ est nulle identiquement, la différence divisée partielle d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ est nulle identiquement dans D . La fonction se réduit donc dans D à un pseudo-polynôme d'ordre $(n_1-1, n_2-1, \dots, n_m-1)$.

Soit l'équation fonctionnelle de même espèce

$$(50) \Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{n_1, n_2, \dots, n_m} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0,$$

Le théorème de M. A. MARCHAUD s'étend au cas de m variables,

Toute solution bornée de l'équation (50) est un pseudo-polynôme d'ordre $(n_1-1, n_2-1, \dots, n_m-1)$ dans R .

Faisons la démonstration par induction complète. Nous avons vu que la propriété est vraie pour $m=2$. Démontrons que si elle est vraie pour $m-1$ variables, elle sera vraie aussi pour m variables. Il suffit de démontrer que si $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ s'annule sur un réseau d'ordre $(n_1-1, n_2-1, \dots, n_m-1)$, elle est nulle identiquement. Posons

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) = \sum_{i=0}^{n_m} (-1)^{n_m-i} \binom{n_m}{i} f(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m + ih_m).$$

Donnant à x_m et h_m des valeurs fixes, on a

$$\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_{m-1}}^{n_1, n_2, \dots, n_{m-1}} g(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) = 0.$$

Mais, $g(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ est une fonction bornée et nulle sur un réseau d'ordre $(n_1-1, n_2-1, \dots, n_{m-1}-1)$ donc, par hypothèse, est nulle identiquement. Donnant maintenant à $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ des valeurs fixes la relation $g(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \equiv 0$ nous montre que

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ est un polynome de degré $n_m - 1$ en x_m . Ce polynome étant nul pour n_m valeurs de x_m est nul identiquement, ce qui démontre la propriété.

25. — Pour pouvoir bien se rendre compte de la forme des solutions des équations que nous étudierons dans le chap. suivant, il faut encore préciser un peu la forme des pseudo-polynomes.

Nous dirons qu'un polynome en $y_1, y_2, \dots, y_r$ est de degré $(s_1, s_2, \dots, s_r)$ s'il est de degré s_1 en y_1 , de degré s_2 en $y_2, \dots$, de degré s_r en y_r .

Considérons, dans le champ des fonctions à m variables $x_1, x_2, \dots, x_m$, un polynome $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ de degré $(s_1, s_2, \dots, s_r)$. Nous dirons que $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ est un *polynome quelconque en r variables* si ses coefficients sont des fonctions arbitraires par rapport aux variables restantes $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m$. Ce polynome est donc de la forme

$$P(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{i_1=0}^{s_1} \sum_{i_2=0}^{s_2} \dots \sum_{i_r=0}^{s_r} C_{i_1 i_2 \dots i_r} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_r^{i_r},$$

où $C_{i_1 i_2 \dots i_r}$ sont des fonctions arbitraires de $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m$.

Une fonction qui est une somme de polynomes quelconques en r variables sera appelé un *pseudo-polynome quelconque de $r^{\text{ème}}$ espèce*. La structure d'une telle fonction est telle que si elle contient un terme de la forme

$$x_{j_1}^{l_1} x_{j_2}^{l_2} \dots x_{j_r}^{l_r} A(x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \dots, x_{j_m})$$

où le coefficient A est une fonction arbitraire, elle contient aussi toutes les termes de la forme

$$x_{j_1}^{l'_1} x_{j_2}^{l'_2} \dots x_{j_r}^{l'_r} A(x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \dots, x_{j_m})$$

$$l'_1 \leq l_1, l'_2 \leq l_2, \dots, l'_r \leq l_r,$$

avec des coefficients fonctions arbitraires.

De cette façon, un pseudo-polynome quelconque de première espèce est un pseudo-polynome quelconque au sens ordinaire. Un pseudo-polynome de $m^{\text{ème}}$ espèce est un polynome quelconque en $x_1, x_2, \dots, x_m$ ayant la structure indiquée, avec des coefficients arbitraires.

Dans la suite nous préciserons encore en disant qu'il s'agit de pseudo-polynomes linéairement mesurables quelconques de diverses espèces. On sous-entend alors que les coefficients sont des fonctions linéairement mesurables quelconques.

CHAPITRE IV

Sur quelques équations fonctionnelles à plusieurs variables indépendantes

26. — Considérons maintenant l'équation à m variables (de $m^{\text{ème}}$ espèce)

$$(51) \quad \Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{mi})} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0.$$

Nous nous proposons de chercher les fonctions $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ qui vérifient l'équation (51) pour toutes les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_m, h_1, h_2, \dots, h_m$ telles que les points $(x_1 + \alpha_{1i} h_1, x_2 + \alpha_{2i} h_2, \dots, x_m + \alpha_{mi} h_m)$ soient dans le domaine D . Pour simplifier, nous pouvons supposer que D soit un rectangle R , ce qui ne restreint pas d'ailleurs la généralité des nos résultats.

Quand il s'agit de l'équation générale (51), nous faisons les hypothèses signalées au Nr. 6 et, en particulier, nous supposons que l'on ait les inégalités (12). Nous supposons en général que l'équation (51) soit d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_m)$.

Nous avons encore les propriétés suivantes :

Toutes fonction vérifiant l'équation (51), vérifie également toute équation conséquente.

En particulier :

Toute fonction vérifiant l'équation (51), vérifie également une équation de la forme

$$(52) \quad \delta_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{mi})} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0.$$

Toute fonction vérifiant une équation réductible, vérifie également une équation de la forme (50).

Le premier résultat démontré au Nr. 13 peut être généralisé. Nous dirons qu'une fonction vérifie une propriété *autour d'un réseau* $(x_{10} | x_{20} | \dots | x_{m0})$ d'ordre $(0, 0, \dots, 0)$, si elle vérifie cette propriété dans le domaine formé par les bandes $x'_{i0} \leq x_i \leq x''_{i0}, i = 1,$

2, ..., m, contenant ce réseau $(a_i \leq x'_{i0} < x''_{i0} \leq b_i, x'_{i0} \leq x_{i0} \leq x''_{i0})$. Nous avons alors la propriété :

Toute solution de l'équation (51) qui est bornée autour d'un réseau d'ordre $(0, 0, \dots, 0)$, est bornée dans R.

Il suffit de donner la démonstration pour deux variables x et y . Soit donc l'équation (51) avec $m=2, n_1=m, n_2=n$. On peut supposer $0 = \alpha_{10} < \alpha_{11} < \dots < \alpha_{1m}, 0 = \alpha_{20} < \alpha_{21} < \dots < \alpha_{2n}$ et que la solution $f(x, y)$ soit bornée autour du réseau $(b_1 | b_2)$, donc $|f(x, y)| < M$ si x est dans l'intervalle (b'_1, b_1) ou y dans l'intervalle (b'_2, b_2) . La démonstration se fait exactement comme au Nr. 13 dans le cas d'une seule variable. Nous pouvons encore supposer que $\alpha_{00} \neq 0$, autrement nous raisonnerions sur l'équation de la forme (52) à laquelle se réduit l'équation (51). Posant

$$\rho_1 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{1m} - \alpha_{11}}, \quad \rho_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{2n} - \alpha_{21}}, \quad \lambda = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n |\alpha_{ij}|}{|\alpha_{00}|} - 1,$$

nous en déduisons

$$|f(x, y)| < \lambda M \text{ pour } x > b'_1 - \rho_1(b_1 - b'_1) \text{ et } y > b'_2 - \rho_2(b_2 - b'_2).$$

Nous trouvons ensuite

$$|f(x, y)| < \lambda^2 M \text{ pour } x > b'_1 - [(1 + \rho_1)^2 - 1](b_1 - b'_1) \text{ et } y > b'_2 - \rho_2(b_2 - b'_2)$$

$$|f(x, y)| < \lambda^2 M \text{ pour } x > b'_1 - \rho_1(b_1 - b'_1) \text{ et } y > b'_2 - [(1 + \rho_2)^2 - 1](b_2 - b'_2).$$

Ces inégalités se déduisent toujours en écrivant l'équation (51) pour des valeurs convenables de x, y, h_1 et h_2 . De la même manière on obtient

$$|f(x, y)| < \lambda^3 M$$

$$\text{pour } x > b'_1 - [(1 + \rho_1)^3 - 1](b_1 - b'_1) \text{ et } y > b'_2 - [(1 + \rho_2)^3 - 1](b_2 - b'_2).$$

En répétant le procédé, on déduit que

$$|f(x, y)| < \lambda^{2s-1} M$$

$$\text{pour } x > b'_1 - [(1 + \rho_1)^{2s-1} - 1](b_1 - b'_1) \text{ et } y > b'_2 - [(1 + \rho_2)^{2s-1} - 1](b_2 - b'_2),$$

donc

$$|f(x, y)| < \lambda^{2s-1} M \text{ dans R}$$

$$\text{si } (1 + \rho_1)^s > \frac{b_1 - a_1}{b_1 - b'_1}, \quad (1 + \rho_2)^s > \frac{b_2 - a_2}{b_2 - b'_2}.$$

La démonstration se fait exactement de la même manière pour m quelconque.

Nous en déduisons la propriété suivante :

Si deux solutions de l'équation (51) coïncident autour d'un réseau d'ordre $(0, 0, \dots, 0)$, elle coïncident partout dans R.

En particulier :

Toute solution de l'équation (51) qui se réduit à un pseudo-polynôme autour d'un réseau d'ordre $(0, 0, \dots, 0)$, est un pseudo-polynôme dans R.

27. — Occupons-nous maintenant de l'équation (52), supposée d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$.

Démontrons le théorème suivant :

Toute solution linéairement mesurable de l'équation (52) est un pseudo-polynôme d'ordre $(n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_m - 1)$.

Nous démontrons ce théorème par induction complète. Il suffit évidemment de démontrer que si cette solution s'annule sur un réseau d'ordre $(n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_m - 1)$, elle est nulle identiquement. Posons

$$g(x_1) = \delta_{h_2}^{(a_{2i})} \delta_{h_3}^{(a_{3i})} \dots \delta_{h_m}^{(a_{mi})} f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Nous avons $\delta_{h_1}^{(a_{1i})} g(x_1) = 0$. Mais, les $x_2, x_3, \dots, x_m, h_2, h_3, \dots, h_m$ étant donnés, $g(x_1)$ est une fonction mesurable de x_1 , donc elle se réduit à un polynôme de degré $n_1 - 1$ qui, étant nul pour n_1 valeurs de x_1 , est nul identiquement. La fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ vérifie donc l'équation

$$\delta_{h_2}^{(a_{2i})} \delta_{h_3}^{(a_{3i})} \dots \delta_{h_m}^{(a_{mi})} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

pour toute valeur donnée de x_1 . Le théorème étant supposé vrai pour $m - 1$ variables, il en résulte qu'il est aussi vrai pour m variables.

Nous pouvons énoncer maintenant le théorème suivant :

La solution linéairement mesurable générale de l'équation (51) est la même que sa solution générale dans le champ des pseudo-polynômes linéairement mesurables.

En particulier :

La solution mesurable B générale de l'équation (51) est la même que sa solution générale dans le champ des pseudo-polynômes mesurables B.

28. — Il reste à trouver maintenant la solution générale de l'équation (51) dans le champ des pseudo-polynômes.

Supposons que l'équation (51) ait un ordre r^{upl} $[k'_1, k'_2, \dots, k'_r]_{1, 2, \dots, r}$ ($1 \leq r \leq m$) et cherchons alors une solution de la forme

$$(53) \quad x_1^{k'_1} x_2^{k'_2} \dots x_r^{k'_r} A(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m)$$

avec A fonction arbitraire.

On trouve que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont précisément les égalités (19) pour $v_s = 0, 1, \dots, l_s$, $s = 1, 2, \dots, r$. Nous avons donc la propriété suivante:

Si l'équation (51) a l'ordre r^{upl} $[k'_1, k'_2, \dots, k'_r]_{1, 2, \dots, r}$ elle est vérifiée par un polynôme quelconque de degré $(k'_1, k'_2, \dots, k'_r)$ en $x_1, x_2, \dots, x_r$.

En particulier:

Tout pseudo-polynôme d'ordre $(k_1-1, k_2-1, \dots, k_m-1)$ vérifie l'équation (51), supposée d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_m)$.

Pour trouver la solution générale dans le champ des pseudo-polynômes linéairement mesurables il suffit de chercher les solutions de la forme

$$(54) \quad G(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=k_j}^{n'_j} x_j^i A_{ji}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m).$$

Nous savons qu'on peut supposer les coefficients linéairement mesurables. Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_{h_2, h_3, \dots, h_m}^{n'_2+1, n'_3+1, \dots, n'_m+1} G(x_1, x_2, \dots, x_m) = \\ = \sum_{i=k_1}^{n'_1} x_1^i \Delta_{h_2, h_3, \dots, h_m}^{n'_2+1, n'_3+1, \dots, n'_m+1} A_{1i}(x_2, \dots, x_m) \end{aligned}$$

où $\Delta_{h_2, h_3, \dots, h_m}^{n'_2+1, n'_3+1, \dots, n'_m+1}$ est l'opération de différence définie au Nr. 6 et exécutée sur les variables $x_2, x_3, \dots, x_m$. Or, l'opération de différence et l'opération (11) sont permutable. En écrivant que $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ vérifie l'équation, on trouve donc

$$\begin{aligned} x_1^{n'_1-k_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \sum_{i_3=0}^{n_3} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \gamma_{i_2 i_3 \dots i_m}^{(k_1)} \Delta_{h_2, h_3, \dots, h_m}^{n'_2+1, n'_3+1, \dots, n'_m+1} A_{1n'_1}(x_2, x_3, \dots, x_m) + \\ + \dots = 0, \end{aligned}$$

les termes non écrits formant un polynôme de degré $n'_1 - k_1 - 1$ en x_1 .

Il faut donc que l'on ait

$$(55) \quad \sum_{i_2=0}^{n_2} \sum_{i_3=0}^{n_3} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \gamma_{i_2 i_3 \dots i_m}^{(k_1)} \Delta_{h_2, h_3, \dots, h_m}^{n'_2+1, n'_3+1, \dots, n'_m+1} A_{1n'_1}(x_2, x_3, \dots, x_m) = 0.$$

Cette équation est de la forme (51), en $m-1$ variables et, par suite de la définition du nombre k_1 , ses coefficients ne sont pas tous nuls. Il en résulte bien que $A_{1n'_1}$ est un pseudo-polynôme. Dans $G(x_1, x_2, \dots, x_m)$ nous pouvons faire rentrer le terme $x_1^{n'_1} A_{1n'_1}$ dans les termes $x_j^i A_{ji}$, $j > 1$. La solution cherchée est donc de la forme (54) où les n'_j sont, en général, changés mais n'_1 est remplacé par $n'_1 - 1$. Répétant le procédé, on démontre que les A_{1i} sont tous des pseudo-polynômes. On démontre de la même manière que les A_{2i} , A_{3i} , ..., A_{mi} sont tous des pseudo-polynômes.

Finalement donc la solution linéairement mesurable générale de l'équation (51) est de la forme

$$(56) \quad G(x_1, x_2, \dots, x_m) = P_1 + P_2 + \dots + P_m,$$

où P_1 est un pseudo-polynôme quelconque d'ordre $(k_1-1, k_2-1, \dots, k_m-1)$ et, en général, P_r est une somme de fonctions de la forme (53) contenant des fonctions arbitraires de $m-r$ variables. En particulier, P_m est un polynôme en $x_1, x_2, \dots, x_m$.

29. — Nous pouvons démontrer maintenant le théorème général suivant:

La solution linéairement mesurable générale de l'équation (51) est de la forme (56) où P_r est un pseudo-polynôme quelconque de $r^{ème}$ espèce. Le pseudo-polynôme P_r est une somme de polynômes quelconques à r variables, à chaque ordre r^{upl} correspondant un tel polynôme.

Tout d'abord le fait que P_r est un pseudo-polynôme de $r^{ème}$ espèce ne résulte pas encore de ce qui précède. On démontre facilement ce résultat par induction complète. En effet, en supposant vraie la propriété pour $m-1$ variables, les résultats précédents nous montrent, qu'elle est vraie aussi pour m variables. L'induction est complète puisque la propriété est évidemment vraie pour $m=1$.

Il faut observer que la démonstration du théorème n'est pas encore complète. En effet, il faut encore démontrer que P_r peut effectivement se mettre sous la forme d'une somme de fonctions

de la forme

$$(57) \quad x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_r^{l_r} A(x_{j_r+1}, x_{j_r+2}, \dots, x_{j_m}) \quad (A \text{ fonction arbitraire})$$

qui sont des solutions de l'équation (51). Ce fait ne résulte pas immédiatement de ce qui précède à cause des équations (55) où l'opération Δ a pour effet de trop élever l'ordre des équations auxquelles doivent satisfaire les fonctions A_{ji} .

On démontre cette propriété de proche en proche pour P_1 , $P_2, \dots$, et P_m . La propriété est évidente pour P_1 . Il suffira d'indiquer la marche de la démonstration en la faisant pour P_2 . Le terme P_2 peut se partager en deux, $P_2 = P'_2 + P''_2$ où P_2 contient les termes (57) ($r=2$) dans lesquels j_1 et j_2 sont 1 et 2 et P''_2 les autres termes de P_2 . Nous pouvons trouver des entiers $r_3, r_4, \dots, r_m$ suffisamment grands tels que

$$\Delta_{h_3, h_4, \dots, h_m}^{r_3, r_4, \dots, r_m} P_2 = \Delta_{h_3, h_4, \dots, h_m}^{r_3, r_4, \dots, r_m} P'_2$$

$$\Delta_{h_3, h_4, \dots, h_m}^{r_3, r_4, \dots, r_m} G(x_1, x_2, \dots, x_m) = \Delta_{h_3, h_4, \dots, h_m}^{r_3, r_4, \dots, r_m} P_1 + \Delta_{h_3, h_4, \dots, h_m}^{r_3, r_4, \dots, r_m} P'_2$$

L'opération Δ se rapportant aux variables $x_3, x_4, \dots, x_m$.

Il suffit maintenant d'écrire que

$$\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})} \Delta_{h_3, h_4, \dots, h_m}^{r_3, r_4, \dots, r_m} P'_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

est vérifiée identiquement en x_1, x_2, h_1, h_2 . Soit

$$(58) \quad x_1^{l_1} x_2^{l_2} A(x_3, x_4, \dots, x_m)$$

l'un des termes de plus haut degré en x_1, x_2 de P'_2 , $l_1 \equiv k_1$, $l_2 \equiv k_2$. On en déduit que la fonction $A(x_3, x_4, \dots, x_m)$ doit vérifier les équations

$$\sum_{i_3=0}^{n_3} \sum_{i_4=0}^{n_4} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \gamma_{i_3 i_4 \dots i_m}^{(\nu_1, \nu_2)} \Delta_{h_3, h_4, \dots, h_m}^{r_3, r_4, \dots, r_m} A(x_3, x_4, \dots, x_m) = 0$$

$$\nu_1 = k_1, k_1 + 1, \dots, l_1, \quad \nu_2 = k_2, k_2 + 1, \dots, l_2.$$

Si (58) n'est pas une solution de (51) l'une au moins de ces équations a ces coefficients non tous nuls, donc $A(x_3, x_4, \dots, x_m)$ est un pseudo-polynôme. Dans ce cas le terme (58) de P_2 peut être mis dans l'un des P_r , $r > 2$. En répétant ce procédé un nombre suffisant de fois et en faisant la même démonstration pour les

autres termes de P_2 , on arrive à la démonstration de la propriété pour P_2 . On démontre ensuite, de la même manière, la propriété pour $P_3, P_4, \dots, P_m$. Pour ce dernier on vérifie facilement que tout polynôme vérifiant l'équation est une somme de solutions de la forme $A x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_m^{h_m}$, A étant une constante arbitraire.

Le théorème général a lieu, en particulier, en supposant la solution mesurable B . Dans ce cas dans la solution générale on peut supposer les fonctions arbitraires mesurables B .

30. — Mettons les résultats précédents sous une forme plus claire. Il résulte, en effet, de l'analyse précédente qu'on peut énoncer notre résultat fondamental sous la forme suivante:

La solution linéairement mesurable générale de l'équation (51) est de la forme

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{n_j} x_j^{i_j} A_{ji}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m)$$

A_{ji} étant la fonction linéairement mesurable la plus générale vérifiant les équations

$$(59) \quad \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_{j-1}=0}^{n_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=0}^{n_{j+1}} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} \gamma_{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_m}^{(v)} A_{ji}(\dots, x_r + \alpha_{ri} h_r, \dots) = 0$$

$$v = 0, 1, \dots, n_j$$

par rapport aux variables $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m$.

Cherchons par exemple les conditions pour que dans la solution générale (56) les termes $P_1, P_2, \dots, P_{r-1}$ disparaissent.

Les définitions et les résultats du Nr. 7 nous montrent que:

La condition nécessaire et suffisante pour que la solution linéairement mesurable générale de l'équation (51) ne contienne que des fonctions arbitraires d'au plus r variables est que toutes les $(m-r-2)^{\text{èmes}}$ équations dérivées soient d'ordre $(0, 0, \dots, 0)$.

En particulier, pour que la solution générale ne contienne que des fonctions arbitraires d'une seule variable, il faut et il suffit que toutes les $(m-3)^{\text{èmes}}$ équations dérivées soient d'ordre $(0, 0, 0)$.

De même:

La condition nécessaire et suffisante pour que la solution linéairement mesurable générale de l'équation (51) soit un poly-

nome est que toutes les $(m-2)^{\text{èmes}}$ équations dérivées soient d'ordre $(0, 0)$.

Par exemple si $m=2$, la condition nécessaire et suffisante pour que la solution linéairement mesurable générale soit un polynome est que l'équation soit d'ordre $(0, 0)$. Nous avons déjà établi partiellement ce résultat dans notre travail antérieur [11].

Nous voyons aussi que :

La condition nécessaire et suffisante pour que la solution linéairement mesurable générale de l'équation (51) d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, soit un pseudo-polynome d'ordre $(k_1-1, k_2-1, \dots, k_m-1)$ est que l'équation (ou l'expression de son premier membre) n'ait aucun ordre double, triple, ... , multiple.

L'équation (52) jouit, en particulier, de cette propriété.

Considérons $N=(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_m+1)$ points $M_i(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi})$ $i=1, 2, \dots, N$ dans l'hyperespace. Nous pouvons former le déterminant $V_{n_1, n_2, \dots, n_m}(M_1, M_2, \dots, M_N)$ à N lignes et colonnes dont la ligne générale est formée par les éléments $x_{1i}^{v_1} x_{2i}^{v_2} \dots x_{mi}^{v_m}$, $v_j=0, 1, \dots, n_j$, $j=1, 2, \dots, m$. Nous en déduisons le déterminant $U_{n_1, n_2, \dots, n_m}(M_1, M_2, \dots, M_N; f)$, en remplaçant les éléments $x_{1i}^{n_1} x_{2i}^{n_2} \dots x_{mi}^{n_m}$ par $f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi})$ respectivement. Le quotient

$$[M_1, M_2, \dots, M_N; f]_{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{U_{n_1, n_2, \dots, n_m}(M_1, M_2, \dots, M_N; f)}{V_{n_1, n_2, \dots, n_m}(M_1, M_2, \dots, M_N)}$$

est la différence divisée d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ de la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ sur les points M_i . Cette définition n'a de sens, bien entendu, que si le déterminant du dénominateur est $\neq 0$. Pour $m=2$ nous avons donné déjà cette définition [10].

Si nous posons $x_{ji} = x_j + \alpha_{ji} h_j$, $i=1, 2, \dots, N-1$, $x_{jN} = x_j$, $j=1, 2, \dots, m$, l'équation

$$[M_1, M_2, \dots, M_N; f]_{n_1, n_2, \dots, n_m} = 0$$

est de la forme (51). Cette équation est, en général, d'ordre $(0, 0, \dots, 0)$ et est vérifiée par tout polynome de degré $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ qui ne contient pas de terme en $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$. Soit, en particulier, l'équation

$$[x_1, x_1 + \alpha_{11} h_1, \dots, x_1 + \alpha_{1N} h_1 | x_2, x_2 + \alpha_{21} h_2, \dots, x_2 + \alpha_{2N} h_2 | \dots | x_m, x_m + \alpha_{m1} h_m, \dots, x_m + \alpha_{mN} h_m; f] = 0.$$

Cette équation est d'ordre $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ et sa solution liné-

airement mesurable générale est un polynome quelconque d'ordre $(n_1-1, n_2-1, \dots, n_m-1)$.

31. — Nous avons toujours fait l'hypothèse que les fonctions sont linéairement mesurables. Considérons, pour simplifier, le cas de deux variables et soit l'équation

$$(60) \quad \delta_{h_1, h_2}^{(a_{1i}, a_{2i})} f(x, y) = 0, \quad (n_1 = m, n_2 = n).$$

Considérons maintenant une solution mesurable $f(x, y)$ de l'équation (60). Soit E_x l'ensemble, de mesure $b_1 - a_1$, des valeurs x pour lesquelles $f(x, y)$ est une fonction mesurable de y et E_y l'ensemble, de mesure $b_2 - a_2$, des valeurs y pour lesquelles $f(x, y)$ est une fonction mesurable de x . Soit $P(x, y)$ le pseudo-polynome d'ordre $(m-1, n-1)$ qui prend les mêmes valeurs que $f(x, y)$ sur le réseau $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1} | y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$, où $x_i \in E_x$, $y_j \in E_y$ et posons $f_1(x, y) = f(x, y) - P(x, y)$. La fonction $f_1(x, y)$ vérifie l'équation, s'annule sur le réseau $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1} | y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$, est mesurable par rapport à y pour $x \in E_x$ et est mesurable par

rapport à x pour $y \in E_y$. Si nous posons $g(x) = \delta_{h_1}^{(a_{2i})} f_1(x, y)$, la fonction $g(x)$ est mesurable pour $y + a_{2i} h_2 \in E_y$ et vérifie l'équation $\delta_{h_1}^{(a_{1i})} g(x) = 0$. Pour $x \in E_x$ la fonction $f_1(x, y)$ est mesurable par rapport à y et vérifie l'équation $\delta_{h_2}^{(a_{2i})} f_1(x, y) = 0$ sur E_y . $f_1(x, y)$ est donc un polynome de degré $n-1$ en y qui, étant nul pour $y_j \in E_y$, est nul identiquement sur E_y (Nr. 17). Il en résulte que $f_1(x, y) = 0$ si $x \in E_x$, $y \in E_y$, donc

Toute solution mesurable de l'équation (60) se réduit à un pseudo-polynome, sauf peut être sur un ensemble $\mathcal{E}$ formé par un ensemble de mesure nulle de droites parallèles à l'axe Ox et par un ensemble de mesure nulle de droites parallèles à l'axe Oy .

On peut facilement construire un exemple qui montre que le théorème général énoncé plus haut (Nr. 29) ne peut être étendu aux fonctions simplement mesurables. Considérons le rectangle $R[-1 < x < +1, -1 < y < +1]$. Soit $\chi(x)$ une solution discontinue de l'équation de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On peut choisir cette solution de manière que l'on ait $\chi(0) = 0$ et $\chi(x) = 0$ sur un ensemble partout dense [7]. Il suffit de prendre une solution telle que $\chi(0) = 0$, $\chi(1) = 0$. Considérons alors la fonction

$f(x, y)$ définie de la manière suivante

$$f(x, 0) = \chi(x) \quad -1 < x < +1$$

$$f(0, y) = \chi(y) \quad -1 < y < +1$$

$$f(x, y) = 0, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

Cette fonction vérifie bien l'équation, de la forme (60),

$$\Delta_{h_1, h_2}^{m, n} f(x, y) = 0, \quad m \geq 2, n \geq 2,$$

mais ne se réduit pas à un pseudo-polynôme (autrement la fonction devrait être identiquement nulle).

Il y a cependant des cas où l'on peut affirmer que toute solution mesurable de l'équation (51) est un pseudo-polynôme. Soit encore $m=2$, $n_1=m$, $n_2=n$. Supposons, par exemple, que dans cette équation $a_{0i}=0$, $i=1, 2, \dots, m$, $a_{0j}=0$, $j=1, 2, \dots, n$. Soit $f(x, y)$ une solution mesurable de cette équation et considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ correspondant. Il existe un pseudo-polynôme $P(x, y)$ tel que $f(x, y) = P(x, y)$ si le point (x, y) n'appartient pas à $\mathcal{E}$. Mais, quels que soient x et y on peut trouver un h_1 et un h_2 tels que les points $(x + \alpha_i h_1, y + \alpha_j h_2)$, $i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$ n'appartiennent pas à $\mathcal{E}$. Il en résulte immédiatement que l'on a $f(x, y) = P(x, y)$ partout.

La réductibilité peut aussi souvent servir à reconnaître si une équation jouit de la propriété précédente.

32. — Comme dans le cas d'une seule variable, on peut considérer des équations réductibles.

Toute solution bornée d'une équation réductible est un pseudo-polynôme.

En général on peut même affirmer que la solution bornée la plus générale d'une équation réductible est la même que sa solution dans le champ des pseudo-polynômes. Il en est sûrement ainsi si les équations (55), (59) sont réductibles.

Ce cas arrive certainement pour l'équation

$$(61) \quad \Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m}^{(n_1, n_2, \dots, n_m)} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

que nous avons déjà examiné pour $m=2$ [11].

La solution bornée générale de l'équation (61) est de la forme (56), où tous les coefficients fonctions arbitraires sont des fonctions bornées quelconques.

Pour que la solution bornée générale de l'équation (61) soit un polynôme de degré n_1-1 en x_1 , de degré n_2-1 en $x_2, \dots$, de degré n_m-1 en x_m , il faut et il suffit que le polynôme caractéristique de premier type soit de la forme

$$(62) \quad F^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum c_{i_1 i_2 \dots i_m} (1-x_1)^{i_1} (1-x_2)^{i_2} \dots (1-x_m)^{i_m},$$

où la sommation est étendue aux valeurs $i_j = 0, 1, \dots, n_j$, $j=1, 2, \dots, m$, les valeurs pour lesquelles on a à la fois $i_1 < n_1$, $i_2 < n_2, \dots, i_m < n_m$ étant exclues. Il faut, en outre, que les constantes $c_{n_1 0 \dots 0}, c_{0 n_2 0 \dots 0}, \dots, c_{0 0 \dots 0 n_m}$ soient toutes différentes de zéro. Des cas particuliers simples sont

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m (1-x_i)^{n_i}$$

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^m (1-x_i)^{n_i} (1+x_1)^{n_1} \dots (1+x_{i-1})^{n_{i-1}} (1+x_{i+1})^{n_{i+1}} \dots (1+x_m)^{n_m}.$$

Pour que la solution bornée générale de l'équation (61) soit un polynôme quelconque de degré $n-1$ il faut et il suffit que le polynôme caractéristique de premier type soit de la forme (62), où la sommation est étendue aux valeurs $i_j = 0, 1, \dots, n_j$, $j=1, 2, \dots, m$ pour lesquelles $i_1 + i_2 + \dots + i_m \geq n$. Il faut en outre que toutes les constantes $c_{i_1 i_2 \dots i_m}$, pour lesquelles $i_1 + i_2 + \dots + i_m = n$, soient différentes de zéro. Des cas particuliers simples sont

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = (m - x_1 - x_2 - \dots - x_m)^n$$

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1 + x_2 + \dots + x_m - x_{\frac{m}{2}+1} - x_{\frac{m}{2}+2} - \dots - x_m)^n \text{ si } m \text{ est pair}$$

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum (1-x_1)^{i_1} (1-x_2)^{i_2} \dots (1-x_m)^{i_m} \dots \text{etc.}$$

On peut aussi voir facilement que si

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum (1-x_{j_1})^{n_{j_1}} (1-x_{j_2})^{n_{j_2}} \dots (1-x_{j_r})^{n_{j_r}},$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons $j_1, j_2, \dots, j_r$, r à r des nombres $1, 2, \dots, m$, la solution générale ne contient que des fonctions arbitraires d'au plus $r-1$ variables.

CHAPITRE V

Sur quelques propriétés fonctionnelles caractérisant les polynômes de deux variables

33. — Considérons le pseudo-polynôme d'ordre (m, n) ,

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^m x^i A_i(y) + \sum_{j=0}^n y^j B_j(x)$$

défini dans le domaine D.

Faisons le changement de variables

$$(63) \quad x = \alpha x' + \beta y' \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

la fonction $f(x, y)$ devient alors $f_1(x', y')$.

Cherchons maintenant à déterminer les coefficients A, B du pseudo-polynôme de manière que $f_1(x', y')$ soit encore un pseudo-polynôme en x' et y' . S'il en est ainsi, on peut trouver deux entiers positifs m', n' tels que l'on ait

$$\Delta_{\beta h, -\alpha h}^{m', n'} f_1(x', y') = 0,$$

identiquement en x', y', h . Compte tenant de (63) et en appliquant l'opération $\Delta_{\alpha\beta h}^{m+1}$ par rapport à x , nous trouvons

$$\sum_{j=0}^n \sum_{r=0}^{m'} \sum_{s=0}^{n'} (-1)^{m'+n'-r-s} \binom{m'}{r} \binom{n'}{s} [y + (r\beta\gamma - s\alpha\delta)h] \Delta_{\alpha\beta h}^{m+1} B_j[x + (r-s)\alpha\beta h] = 0$$

identiquement en x, y, h . Il faut donc, en particulier, que l'on ait

$$\sum_{r=0}^{m'} \sum_{s=0}^{n'} (-1)^{m'+n'-r-s} \binom{m'}{r} \binom{n'}{s} \Delta_{\alpha\beta h}^{m+1} B_n[x + (r-s)\alpha\beta h] = 0$$

ou, après de légères modifications,

$$\Delta_{\alpha\beta h}^{m'+n'+m+1} B_n(x) = 0.$$

Si nous sommes dans le cas où l'on peut affirmer que la solution générale de cette équation est un polynôme, nous voyons que $f(x, y)$ est de la forme

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m_1} x^i A_i(y) + \sum_{j=0}^{n-1} y^j B_j(x) \quad (m_1 = m + m' + n').$$

En répétant le procédé, on voit que

$$\Delta_{\alpha\beta h}^{m'+n'+m_1+1} B_{n-1}(x) = 0$$

et, en général,

$$(64) \quad \Delta_{\alpha\beta h}^{m+(n-j+1)(m'+n')} B_j(x) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

sous l'hypothèse que les solutions générales des équations pour $B_{j+1}(x), B_{j+2}(x), \dots, B_n(x)$ sont des polynômes. Sous des hypothèses analogues on trouve que

$$(65) \quad \Delta_{\gamma\delta h}^{n+(m-i+1)(m'+n')} A_i(y) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Pour simplifier le langage nous dirons qu'une transformation (63) définit une direction T. Cette transformation signifie qu'on a pris un nouveau système d'axes $Ox'y'$. En particulier, le système initial Oxy est la direction T_0 . Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, qu'on ne change jamais d'unité de longueur et nous pouvons alors supposer, ce que nous ferons toujours, que $\alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \delta^2 = 1$. De cette manière le système $Ox'y'$ est complètement déterminé par les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de la transformation (63). Nous dirons que deux directions T_1, T_2 sont complètement distinctes si les droites portant les quatre axes sont distinctes. Pour que les directions T et T_0 soient complètement distinctes il faut et il suffit que l'on ait

$$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0, \delta \neq 0, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Si nous remarquons que les équations (64), (65) sont réductibles, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction bornée, ou pour qu'une fonction mesurable, soit un pseudo-polynôme dans deux directions complètement distinctes est que cette fonction se réduise à un polynôme.

La condition est évidemment suffisante. Nous avons démontré qu'elle est aussi nécessaire pour T_0 et T ce qui ne restreint pas d'ailleurs la généralité. Nous avons tenu compte des propriétés du chap. III. Le théorème est vrai pour le domaine D. Dans la démonstration les variables x, y, h varient de manière qu'on ne sorte pas du domaine D. Nous pouvons d'ailleurs raisonner de proche en proche, en décomposant le domaine D en domaines partiels convenables. Les conclusions sont parfaitement justifiées à cause de la propriété de prolongement dont jouissent les pseudo-polynômes (Nr. 20).

On peut voir facilement que si les deux directions ne sont pas complètement distinctes la propriété n'est plus vraie.

34. — Déterminons maintenant la forme générale des polynômes qui sont des pseudo-polynômes d'ordre donné (m, n) dans la direction initiale T_0 et d'ordre donné (m', n') dans la direction T . Un tel polynôme est évidemment une somme de polynômes homogènes jouissant de la même propriété, donc

$$f(x, y) = \phi_0(x, y) + \phi_1(x, y) + \dots$$

où $\phi_k(x, y) = c_0 x^k + c_1 x^{k-1} y + \dots + c_k y^k$ est un polynôme homogène de degré k .

On trouve facilement que si $k < \min(m+n+2, m'+n'+2)$ le polynôme $\phi_k(x, y)$ est complètement arbitraire. Dans le cas contraire il y a

$$\frac{2k - m - n - m' - n' - 4 + |k - m - n - 2| + |k - m' - n' - 2|}{2}$$

conditions pour déterminer les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_k$. Ces conditions sont

$$c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = c_{k-m-1} = 0$$

$$c'_{n'+1} = c'_{n'+2} = \dots = c'_{k-m'-1} = 0$$

où $\phi_k(\alpha x' + \beta y', \gamma x' + \delta y') = c'_0 x'^k + c'_1 x'^{k-1} y' + \dots + c'_k y'^k$.

On peut d'ailleurs écrire les hypothèses faites sur $f(x, y)$ sous la forme

$$(66) \quad \frac{\partial^{m+n+2} f(x, y)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}} \equiv 0, \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(m'+1)} \left(\beta \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n'+1)} f(x, y) \equiv 0.$$

De ces relations on déduit facilement que

$$\frac{\partial^{m+n+m'+n'+3} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^{m+n+m'+n'+3-i}} \equiv 0, \quad i = 0, 1, \dots, m+n+m'+n'+3$$

donc,

Tout polynôme qui est un pseudo-polynôme d'ordre (m, n) dans la direction T_0 et un pseudo-polynôme d'ordre (m', n') dans la direction T , est au plus de degré $m+n+m'+n'+2$.

Supposons $m' = m, n' = n$. De (66) on déduit facilement que pour que $f(x, y)$ soit un pseudo-polynôme d'ordre (m, n) dans toute

direction il faut et il suffit que

$$\frac{\partial^{m+n+2} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^{m+n+2-i}} \equiv 0, \quad i = 0, 1, \dots, m+n+2$$

donc,

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction bornée, ou pour qu'une fonction mesurable, soit un pseudo-polynôme d'ordre (m, n) dans toute direction est que cette fonction soit un polynôme quelconque de degré $m+n+1$.

35. — Il peuvent exister des polynômes de degré $> m+n+1$ qui sont des pseudo-polynômes d'ordre (m, n) dans une infinité de directions différentes. Nous dirons que la direction T est rectangulaire si la transformation (63) est orthogonale, donc si les axes $Ox'y'$ sont rectangulaires (les axes primitifs Oxy le sont par hypothèse).

Pour que $f(x, y)$ soit un pseudo-polynôme d'ordre (m, n) dans toute direction rectangulaire, il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r \binom{n+1}{r} \binom{m+1}{i-r} \frac{\partial^{m+n+2} f(x, y)}{\partial x^{m+1+i-2r} \partial y^{n+1-i+2r}} \equiv 0$$

$$i = 0, 1, \dots, m+n+2, \quad \left\{ \frac{p}{q} \right\} = 0 \quad \text{si } p < q.$$

On en déduit immédiatement que

$$\frac{\partial^{m+n+3} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^{m+n+3-i}} \equiv 0, \quad i = 0, 1, \dots, m+n+3,$$

donc que $f(x, y)$ est au plus de degré $m+n+2$. Ce polynôme est donc de la forme $P(x, y) + \phi_{m+n+2}(x, y)$, où $P(x, y)$ est un polynôme arbitraire de degré $m+n+1$. Pour déterminer le polynôme ϕ_{m+n+2} , il est avantageux de l'écrire sous la forme $\phi_{m+n+2}(x, y) =$

$$= \sum_{j=0}^{m+n+2} c_j z^{m+n+2-j} \bar{z}^j, \quad \text{où } z = x + iy \text{ avec } i = \sqrt{-1} \text{ et } \bar{z} \text{ désigne le}$$

nombre imaginaire conjugué de z . On a bien entendu, $c_j = \bar{c}_{m+n+2-j}$. Ce polynôme doit vérifier l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + t \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{(m+1)} \left(\frac{\partial}{\partial z} - t \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{(n+1)} \phi_{m+n+2} = 0$$

quel que soit t . On trouve que

$$(67) \quad c_j \sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r \binom{n+1}{r} \binom{m+1}{j-r} = 0, \quad j=0, 1, \dots, m+n+2.$$

Le coefficient c_j est nul ou arbitraire suivant que le second facteur de (67) est $\neq 0$ ou $=0$. Il peut arriver que ϕ_{m+n+2} disparaisse complètement. Dans le cas contraire, on voit, qu'il est toujours divisible par x^2+y^2 . Le tableau suivant nous montre les résultats pour quelques valeurs de m et n

n	m	ϕ_{m+n+2}
0	impair	0
0	pair	$C(x^2+y^2)^{\frac{m+2}{2}}$
1	$m+3$ différent d'un carré parfait	0
1	$m+3=p^2$	$(x^2+y^2)^{\frac{p^2-p}{2}} [cz^p + \bar{c}\bar{z}^p]$
2	impair, $3m+10$ différent d'un carré parfait	0
2	pair, $3m+10$ différent d'un carré parfait	$C(x^2+y^2)^{\frac{m+4}{2}}$
2	impair, $3m+10=p^2$	$(x^2+y^2)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} (cz^p + \bar{c}\bar{z}^p)$
2	pair, $3m+10=p^2$	$C(x^2+y^2)^{\frac{m+4}{2}} + (x^2+y^2)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} (cz^p + \bar{c}\bar{z}^p)$
	$m=n$	$\sum_{j=0}^n C_j x^{n-j} y^{n-j} [x^{2j+2} + (-1)^j y^{2j+2}]$

Ici $C, C_1, \dots$ sont des constantes réelles et c une constante complexe arbitraires.

36. — Faisons quelques remarques sur les résultats précédents. Le pseudo-polynome $f(x, y)$ du Nr. 33 a été soumis en réalité à la seule condition de vérifier les équations $\Delta_{\beta h, -\alpha h}^{m', n'} f_1(x', y') = 0$, $\Delta_{\delta h, -\gamma h}^{m', n'} f_1(x', y') = 0$. Si, plus généralement, nous supposons que $f_1(x', y')$ vérifie une certaine équations de première espèce, $\Delta_h^{m', n'} f_1(x', y') = 0$, nous obtenons, en partie au moins, les mêmes résultats. La seule différence est que les équations vérifiées par les

coefficients A, B sont d'une forme un peu plus générale que (64), (65), mais sont, en tout cas, de la forme (28) (plus exactement de la forme (29)). Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante:

La fonction linéairement mesurable la plus générale, dont une différence de seconde espèce dans une direction T_1 et une différence de première espèce dans une direction T_2 , complètement distincte de T_1 , sont nulles identiquement, est un polynome.

La forme de ce polynome est d'ailleurs, évidemment, celle trouvée plus haut.

On peut supposer la fonction mesurable (superficiellement) et le résultat subsiste encore. En effet, on démontre facilement que la fonction est linéairement mesurable. Soit E_x l'ensemble (de mesure $b_1 - a_1$) des x pour lesquelles $f(x, y)$ est une fonction mesurable de y . Soit x_0 une valeur de x et tenons compte du fait que $f_1(x', y')$ vérifie l'équation $\Delta_h^{m', n'} f_1(x', y') = 0$. Faisons varier x' et y' de manière que l'on ait constamment $x_0 = \alpha x' + \beta y'$. Pour tout couple de telles valeurs de x', y' , les nombres $x_0 + (\alpha i + \beta j)h$, $i+j > 0$ appartiennent à E_x , pour presque toutes les valeurs de h . En particulier, il en est ainsi pour des valeurs aussi petites que l'on veut de h , ce qui suffit pour conclure que $f(x, y)$ est mesurable de y pour tout x . On démontre de la même manière que $f(x, y)$ est une fonction mesurable de x pour toute valeur de y . Remarquons que, en réalité, la fonction $f(x, y)$ vérifie un système de deux équations de la forme (51). La seconde de ces équations est justement de la forme indiqué à la fin du Nr. 31, qui assure la linéaire mesurabilité.

On pourrait encore généraliser le résultat précédent, en supposant que dans la première direction seulement une différence de première espèce est nulle identiquement. Bien entendu, on suppose que la fonction vérifie encore certaines conditions, sous lesquelles on peut affirmer qu'elle est un pseudo-polynome.

Désignons par $f(M)$ la valeur de la fonction au point $M(x, y)$: M. N. CIORĂNESCU [3] a démontré que si la fonction vérifie l'équation fonctionnelle

$$(68) \quad f(M) + f(M_1) = f(M_2) + f(M_3)$$

pour tout quadruple de points M, M_1, M_2, M_3 formant un rectangle (M, M_1 sommets opposés), elle se réduit à

$$C(x^2+y^2) + C_1x + C_2y + C_3.$$

M. N. CIORĂNESCU suppose l'existence des dérivées de deux pre-

miers ordres de $f(x, y)$. On voit que le résultat de M. N. CIORĂNESCU subsiste sous des hypothèses beaucoup plus générales. Par exemple, sous les hypothèses suivantes :

1°. $f(x, y)$ est une fonction mesurable.

2°. l'équation (68) subsiste si M, M_1, M_2, M_3 forment un rectangle à cotés parallèles aux axes Oxy .

3°. l'équation (68) subsiste aussi si M, M_1, M_2, M_3 forment un carré à côtés parallèles aux axes d'une direction rectangulaire T' , complètement distincte de T_0 .

En effet, $f(x, y)$ doit être de la forme $Cx^2 + C'y^2 + C_1x + C_2y + C_3$ et la condition 3° donne encore $C = C'$.

BIBLIOGRAPHIE

1. ANGHELUTZA Th. « Sur une équation fonctionnelle caractérisant les polynômes » *Mathematica*, t. VI (1932), p. 1—7.
2. BROUWER L. E. J. « Over differentiequotienten en differentialquotienten » *Verhandelingen der K. Akad. van Wetenschappen Amsterdam*, t. 17 (1908), p. 38—45.
3. CIORĂNESCU N. « Une propriété caractéristique du paraboloïde de rotation » *Bulletin de Math. et de Ph. de l'Ec. Polyt. Bucarest*, VI année, Fasc. 16—18 (1936) p. 134—135.
4. DARBOUX G. « Sur la composition des forces en statique » *Bulletin des Sciences Math.*, t. 9 (1875) p. 281—288.
5. DENJOY A. « Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur » *Fundamenta Mathematicae*, t. XXV (1935), p. 273—326.
6. FUBINI G. « Sugli integrali multipli » *Rendiconti Accademia dei Lincei*, ser. 5 v. 16 (I sem.) (1907), p. 608—614.
7. HAMEL G. « Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ » *Math. Annalen*, t. 60 (1905), p. 459—462.
8. MARCHAUD A. « Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles » *Journal de Math.* t. VI (1927), p. 332—425.
9. PICARD E. « Leçons sur quelques équations fonctionnelles » Paris, Gauthier-Villars, 1928.
10. POPOVICIU Tib. « Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles » Thèse, Paris, 1933 ou *Mathematica*, t. VIII (1934), p. 1—86.
11. — « Sur certaines équations fonctionnelles définissant des polynômes » *Mathematica*, t. X (1934) p. 197—211.
12. SIERPINSKI W. « Sur les fonctions convexes mesurables » *Fundamenta Mathematicae*, t. I (1920), p. 125—129.