PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BUCAREST
SOCIETATEA ROMÂNĂ DE ȘTIINȚE, SECȚIA MATEMATICĂ

BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ ROUMAINE DES SCIENCES

TOME 41 (1)

1939

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA CENTRALĂ
BUCUREȘTI
1 9 3 9

C. 8.903.

GÉNÉRALISATION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE RENCONTRÉE PAR G. DARBOUX

PAR

D. V. IONESCO

Professeur à la Faculté des Sciences de Cluj (Roumanie)

1. G. DARBOUX[1]) *a montré que si dans la formule*

$$\int_0^h (a + b\,x + c\,x^2)\,d\,x = a\,h + \frac{c\,h^2}{2} + \frac{b\,h^3}{3},$$

on remplace dans le second membre les constantes a, b, c *à l'aide des valeurs* $\varphi(0)$, $\varphi\left(\frac{h}{2}\right)$, $\varphi(h)$ *que prend le polynôme du second degré*

$$\varphi(x) = a + b\,x + c\,x^2$$

pour $x = 0$, $x = \frac{h}{2}$, $x = h$, *on obtient l'identité*

$$\int_0^h \varphi(x)\,d\,x = \frac{h}{6}\left[\varphi(o) + 4\varphi\left(\frac{h}{2}\right) + \varphi(h)\right] \tag{1}$$

qui est vérifiée aussi par le polynôme du troisième degré.

On peut former des identités analogues à l'identité (1), en suivant la méthode precédente, mais en partant d'un polynôme de degré quelconque.

Par exemple, en partant des polynômes de degré 3, 4, 5 *et* 6, *on a les identités :*

$$\int_0^h \varphi(x)\,d\,x = \frac{h}{8}\left[\varphi(o) + 3\varphi\left(\frac{h}{3}\right) + 3\varphi\left(\frac{2\,h}{3}\right) + \varphi(h)\right] \tag{2}$$

---

[1]) G. DARBOUX. Sur le centre de gravité de certains volumes. Note publiée dans le cours de Mécanique de DESPEYROUS, pag. 383.

$$(3)\int_0^h \varphi(x)\,dx = \frac{h}{90}\left[7\varphi(o)+32\varphi\left(\frac{h}{4}\right)+12\varphi\left(\frac{h}{2}\right)+32\varphi\left(\frac{3h}{4}\right)+7\varphi(h)\right]$$

$$(4)\quad \int_0^h \varphi(x)\,dx = \frac{h}{288}\left[19\varphi(o)+75\varphi\left(\frac{h}{5}\right)+50\varphi\left(\frac{2h}{5}\right)\right.$$

$$\left.+50\varphi\left(\frac{3h}{5}\right)+75\varphi\left(\frac{4h}{5}\right)+19\varphi(h)\right]$$

$$(5)\quad \int_0^h \varphi(x)\,dx = \frac{h}{840}\left[41\varphi(o)+216\varphi\left(\frac{h}{6}\right)+27\varphi\left(\frac{h}{3}\right)+272\varphi\left(\frac{h}{2}\right)\right.$$

$$\left.+27\varphi\left(\frac{2h}{3}\right)+216\varphi\left(\frac{5h}{6}\right)+41\varphi(h)\right].$$

On vérifie aisément que les formules (3) et (5) sont satisfaites, la première par un polynôme quelconque du 5^e degré et la seconde par un polynôme quelconque du 7^e degré [2]).

Dans ce travail nous allons généraliser le théorème de G. Darboux et démontrer que l'identité analogue à (1), formée en partant d'un polynôme quelconque de degré $2p$, est satisfaite également par un polynôme quelconque de degré $2p+1$.

2. Considérons la formule

$$(6)\quad \int_0^x \left(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n\right)dx$$

$$= A_0x+\frac{A_1x^2}{2}+\frac{A_2x^3}{3}+\ldots+\frac{A_nx^{n+1}}{n+1}$$

et dans le polynôme

$$\varphi(x) = A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n,$$

remplaçons successivement x par

$$0,\ \frac{x}{n},\ \frac{2x}{n},\ \ldots,\ \frac{(n-1)x}{n},\quad x.$$

[2]) On rencontre les seconds membres des formules (2), (3), (4), (5), ... aussi dans le calcul approché d'une intégrale définie en suivant la méthode d'interpolation de Lagrange et en divisant l'intervalle d'intégration en parties égales. (E. Goursat, cours d'analyse mathématique, Tome I, 1933, p. 266).

Nous aurons les équations

$$\varphi(0) = A_0$$

$$\varphi\left(\frac{x}{n}\right) = A_0 + \frac{1}{n} A_1 x + \frac{1}{n^2} A_2 x^2 + \ldots + \frac{1}{n^n} A_n x^n$$

$$\varphi\left(\frac{2x}{n}\right) = A_0 + \frac{2}{n} A_1 x + \frac{2^2}{n^2} A_2 x^2 + \ldots + \frac{2^n}{n^n} A_n x^n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi(x) = A_0 + \frac{n}{n} A_1 x + \frac{n^2}{n^2} A_2 x^2 + \ldots + \frac{n^n}{n^n} A_n x^n$$

que nons allons résoudre par rapport à A_0, $A_1 x$, $A_2 x^2, \ldots, A_n x^n$ et porter ensuite ces valeurs dans le second membre de la formule (6). Nous aurons une identité de la forme

$$\int_0^x \varphi(x)\, dx = x\left[\alpha_0 \varphi(0) + \alpha_1 \varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \ldots + \alpha_n \varphi(x)\right] \tag{7}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes.

Pour calculer les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *il est préférable d'écrire que l'équation (7) est satisfaite lorsqu'on remplace $\varphi(x)$ successivement par*

$$1,\ x,\ x^2, \ldots, x^n.$$

Nons aurons ainsi les équations

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n &= 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n &= n\,\frac{1}{2} \\ \alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \ldots + n^2\alpha_n &= n^2\,\frac{1}{3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 + 2^n\alpha_2 + \ldots + n^n\alpha_n &= n^n\,\frac{1}{n+1}. \end{aligned} \tag{8}$$

On peut donner les valeurs des constantes α_i à l'aide des intégrales définies. En posant

$$\theta_0 = 0,\ \theta_1 = \frac{1}{n},\ \theta_2 = \frac{2}{n},\ \ldots,\ \theta_n = 1,$$

on a

$$\alpha_i = \int_0^1 \frac{(t-\theta_0)\ldots(t-\theta_{i-1})(t-\theta_{i+1})\ldots(t-\theta_n)}{(\theta_i-\theta_0)\ldots(\theta_i-\theta_{i-1})(\theta_i-\theta_{i+1})\ldots(\theta_i-\theta_n)}\,dt$$

mais nons n'aurons pas besoin de ces expressions.

Remarquons que les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant déterminés par les équations (8), nous avons l'identité,

$$(9)\quad \int_\lambda^\mu \varphi(x)\,dx = (\mu-\lambda)\Big[\alpha_0\varphi(\lambda) + \alpha_1\varphi\left(\lambda+\frac{\mu-\lambda}{n}\right) + \ldots$$

$$+ \alpha_i\varphi\left(\lambda + i\frac{\mu-\lambda}{n}\right) + \ldots + \alpha_n\varphi(\mu)\Big]$$

valable pour un polynôme quelconque de degré n et quelles que soient les constantes λ et μ.

Nous allons maintenant nous poser le problème inverse, d'intégrer l'équation fonctionnelle (9). Nons supposons que la fonction inconnue $\varphi(x)$ est continue et a des dérivées de tout ordre et que l'équation fonctionnelle (9), doit être satisfaite quelles que soient les constantes λ et μ.

3. Considérons une équation fonctionnelle de la forme (9),

$$(10)\quad \int^\mu \varphi(x)\,dx = (\mu-\lambda)\left[\beta_0\varphi(\lambda) + \beta_1\varphi\left(\lambda+\frac{\mu-\lambda}{n}\right) + \ldots + \beta_n\varphi(\mu)\right]$$

où $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sont des constantes données et donnons la méthode d'intégration, la fonction inconnue $\varphi(x)$ étant supossée continue et ayant des dérivées de tout ordre et l'équation fonctionnelle devant être satisfaite quelles que soient les valeurs de λ et μ.

Posons

$$\lambda = h-k \quad , \quad \mu = h+k;$$

l'équation fonctionnelle (10) devient

$$(11)\quad \int_{h-k}^{h+k} \varphi(x)\,dx = 2k\Big[\beta_0\varphi(h-k) + \ldots + \beta_i\varphi\left(h+\frac{2i-n}{n}k\right) + \ldots$$

$$\ldots + \beta_n\varphi(h+k)\Big].$$

En développant en série les deux membres de cette formule, suivant les puissances de k, nous avons l'équation

$$\varphi(h) + \frac{k^2}{3!}\varphi''(h) + \frac{k^4}{5!}\varphi^{\mathrm{IV}}(h) + \ldots = \gamma_0\varphi(h) + \gamma_1\frac{k}{1}\varphi'(h) + \gamma_2\frac{k^2}{2!}\varphi''(h) + \ldots$$

où $\gamma_0\, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ sont des fonctions linéaires de $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$.

L'équation précédente devant être satisfaite quelle que soit la valeur de k, nous avons les équations

$$(12) \qquad \begin{aligned} (1-\gamma_0)\,\varphi(h) &= 0 \\ \gamma_1\ \ \varphi'(h) &= 0 \\ \left(\frac{1}{3}-\gamma_2\right)\varphi''(h) &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

en nombre infini.

Supposons que les constantes $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ soient telles que dans ces formules, les coefficients de $\varphi(h), \varphi'(h), \dots, \varphi^{(q)}(h)$ soient nuls, tandis que le coefficient de $\varphi^{(q+1)}(h)$ ne soit pas nul. On satisfait à toutes les équations (12) en prenant pour $\varphi(h)$ un polynôme quelconque de degré q. Donc dans ce cas l'intégrale de l'équation fonctionnelle (10) est un polynôme quelconque de degré q.

Lorsque $\gamma_0 \neq 1$, cette intégrale est nulle.

Nons allons maintenant déterminer les constantes $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, de façon que le degré q du polynôme, qui représente l'intégrale de l'équation fonctionnelle (10) soit le plus grand possible. Comme nous avons $n+1$ indéterminées nous pouvons annuler dans les formules (12) les coefficients de $\varphi(h), \varphi'(h), \dots, \varphi^{(n)}(h)$, d'où résulte que $q=n$. Nous démontrerons que dans ce cas, l'équation fonctionnelle (10) coïncide avec l'équation fonctionnelle (9).

4. Nous allons distinguer deux cas suivant la parité de n. Supposons d'abord $n=2p$.

On peut écrire l'équation (11) de la façon suivante

$$\int_{h-k}^{h+k} \varphi(x)\,dx = 2k\left[\sum_{s=1}^{p} \beta_{p-s}\,\varphi\left(h-\frac{sk}{p}\right) + \beta_p\,\varphi(h) + \sum_{s=1}^{p} \beta_{p+s}\,\varphi\left(h+\frac{sk}{p}\right)\right].$$

En développant les deux membres suivant les puissances de k nous avons

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{k^{2r}}{(2r+1)!}\,\varphi^{(2r)}(h) = \sum_{s=1}^{p} \beta_{p-s} \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{sk}{p}\right)^r \frac{\varphi^{(r)}(h)}{r\,!} + \beta_p\,\varphi(h)$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} \beta_{p+s} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{sk}{p}\right)^r \frac{\varphi^{(r)}(h)}{r\,!}$$

ou encore

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2r)}(h)}{(2r+1)!}k^{2r}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(\sum_{s=1}^{\infty}s^r\beta_{p-s}\right)\frac{\varphi^{(r)}(h)}{p^r}\frac{k^r}{r!}+\beta_p\varphi(h)$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{p}s^r\beta_{p+s}\right)\frac{\varphi^{(r)}(h)}{p^r}\frac{k^r}{r!}.$$

En identifiant les coefficients de k^j ($j=0, 1, \ldots, 2p$), nous avons le système d'équations linéaires en $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2p}$

$$E_0 \quad =\sum_{s=0}^{2p}\beta_s=1$$

$$\text{(13)} \qquad E_{2j-1}=-\sum_{s=1}^{p}s^{2j-1}\beta_{p-s}+\sum_{s=1}^{p}s^{2j-1}\beta_{p+s}=0 \quad (j=1, 2, \ldots, p)$$

$$E_{2j} \quad =\sum_{s=1}^{p}s^{2j}\beta_{p-s}+\sum_{s=1}^{p}s^{2j}\beta_{p+s}=\frac{p^{2j}}{2j+1}, \quad (j=1, 2, \ldots, p)$$

où nous avons noté par $E_0, E_1, \ldots, E_{2p}$ les premiers membres de ces équations.

Supposons maintenant $n=2p+1$.

On peut écrire l'équation (11) de la façon suivante.

$$\int_{h-k}^{h+k}\varphi(x)\,dx=2k\left[\sum_{s=0}^{p}\beta_{p-s}\varphi\left(h-\frac{2s+1}{2p+1}k\right)+\sum_{s=0}^{p}\beta_{p+s+1}\varphi\left(h+\frac{2s+1}{2p+1}k\right)\right]$$

En développant les deux membres suivant les puissances de k, nous avons

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2r)}_{(h)}}{(2r+1)!}k^{2r}=\sum_{s=0}^{p}\beta_{p-s}\sum_{r=}^{\infty}\left(-\frac{2s+1}{2p+1}k\right)^r\frac{\varphi^{(r)}_{(h)}}{r!}$$

$$+\sum_{s=0}^{p}\beta_{p+s+1}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{2s+1}{2p+1}k\right)^r\frac{\varphi^{(r)}_{(h)}}{r!}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(\sum_{s=0}^{p}(2s+1)^r\beta_{p-s}\right)\frac{\varphi^{(r)}_{(h)}}{(2p+1)^r}\frac{k^r}{r!}$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{p}(2s+1)^r\beta_{p+s+1}\right)\frac{\varphi^{(r)}_{(h)}}{(2p+1)^r}\frac{k^r}{r!}.$$

En identifiant les coefficients de k^j $(j=0, 1, \ldots, 2p+1)$ nous avons le systeme d'équations linéaires en $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2p+1}$.

$$E'_{2j}=\sum_{s=0}^{p}(2s+1)^{2j}\beta_{p-s}+\sum_{s=0}^{p}(2s+1)^{2j}\beta_{p+s+1}=\frac{(2p+1)^{2j}}{2j+1}$$

$$(14) \qquad\qquad (j=0,1,\ldots,p)$$

$$E'_{2j+1}=-\sum_{s=0}^{p}(2s+1)^{2j+1}\beta_{p-s}+\sum_{s=0}^{p}(2s+1)^{2j+1}\beta_{p+s+1}=0$$

$$(j=0,1,\ldots,p)$$

où nous avons noté par $E'_0, E'_1, \ldots, E'_{2p+1}$ les premiers membres de ces équations.

5. Nous allons démontrer maintenant que le système d'équations linéaires (13) ou (14) est équivalent au système d'équations linéaires (8), suivant que $n=2p$ ou $n=2p+1$.

Considérons d'abord le système d'équations (13).

La première équation (13) est identique à la première équation (8). Faisons la combinaison linéaire

$$(15) \qquad F_{2j}=E_{2j}+C_{2j}^1 pE_{2j-1}+C_{2j}^2 p^2 E_{2j-2}+\ldots+C_{2j}^{2j}p^{2j}E_0$$

$$=p^{2j}\left(\frac{1}{2j+1}+\frac{C_{2j}^2}{2j-1}+\frac{C_{2j}^4}{2j-3}+\ldots+\frac{C_{2j}^{2j}}{1}\right),$$

$$(j=1, 2,\ldots, p)$$

où nous avons noté par F_{2j} le premièr membre de cette combinaison et par C_{2j}^q le symbole des combinaisons.

Dans le premier membre de la formule (15) le coefficient de β_{p-s} sera

$$s^{2j}-C_{2j}^1 ps^{2j-1}+C_{2j}^2 p^2 s^{2j-2}-\ldots+C_{2j}^{2j}p^{2j}=(p-s)^{2j}$$

et celui de β_{p+s} sera

$$s^{2j}+C_{2j}^1 ps^{2j-1}+C_{2j}^2 p^2 s^{2j-2}+\ldots+C_{2j}^{2j}p^{2j}=(p+s)^{2j}.$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{1}{2j+1}+\frac{C_{2j}^2}{2j-1}+\frac{C_{2j}^4}{2j-3}+\ldots+\frac{C_{2j}^2}{1}=\frac{2^{2j}}{2j+1},$$

de sorte que la formule (15) devient

$$\sum_{s=1}^{p}(p-s)^{2j}\beta_{p-s}+\sum_{s=1}^{p}(p+s)^{2j}\beta_{p+s}=\frac{(2p)^{2j}}{2j+1}$$

ou

$$\sum_{s=1}^{2p}s^{2j}\beta_s=\frac{(2p)^{2j}}{2j+1} \qquad (j=1,2,\ldots,p)$$

Ces équations sont justement les équations de rang impair dans le système (8).

Faisons aussi la combinaison linéaire

$$(16)\quad F_{2j-1}=E_{2j-1}+C_{2j-1}^{1}p\,E_{2j-2}+C_{2j-1}^{2}p^{2}E_{2j-3}+\ldots+C_{2j-1}^{2j-1}p^{2j-1}E_0$$

$$=p^{2j-1}\left(\frac{C_{2j-1}^{1}}{2j-1}+\frac{C_{2j-1}^{3}}{2j-3}+\ldots+\frac{C_{2j-1}^{2j-1}}{1}\right)$$

$$(j=1,2,\ldots,p)$$

où nous avons noté par F_{2j-1} le premièr membre de cette combinaison.

Dans le premier membre de cette combinaison le coefficient de β_{p-s} est

$$p^{2j-1}-C_{2j-1}^{1}sp^{2j-2}+C_{2j-1}^{2}s^{2}p^{2j-3}-\ldots-C_{2j-1}^{2j-1}s^{2j-1}=(p-s)^{2j-1}$$

et celui pe β_{p+s} est

$$p^{2j-1}+C_{2j-1}^{1}sp^{2j-2}+C_{2j-1}^{2}s^{2}p^{2j-3}+\ldots+C_{2j-1}^{2j-1}s^{2j-1}=(p+s)^{2j-1}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{C_{2j-1}^{1}}{2j-1}+\frac{C_{2j-1}^{3}}{2j-3}+\ldots+\frac{C_{2j-1}^{2j-1}}{1}=\frac{2^{2j-1}}{2j}$$

de sorte que la formule (16) devient

$$\sum_{s=1}^{2p}s^{2j-1}\beta_s=\frac{(2p)^{2j-1}}{2j}. \qquad (j=1,2,\ldots,p)$$

Ces équations sont justement les équations de rang pair dans le système (8).

Nous avons donc prouvé que le système d'équations linéaires (13) est équivalent au système d'équations (8).

Passons maintenant au système d'équations (14).

La combinaison linéaire

$$F'_{2j} = \frac{1}{2^{2j}}\left[E'_{2j} + C^1_{2j}(2p+1)\,E'_{2j-1} \dots + C^{2j}_{2j}(2p+1)^{2j}\,E'_0\right]$$

$$= \frac{(2p+1)^{2j}}{2^{2j}}\left[\frac{1}{2j+1} + \frac{C^2_{2j}}{2j-1} + \dots + \frac{C^{2j}_{2j}}{1}\right],$$

$$(j = 0, 1, \dots, p)$$

se réduit comme plus haut à

$$\sum_{s=1}^{2p+1} s^{2j}\,\beta_s = \frac{(2p+1)^{2j}}{2j+1}\ ; \qquad (j = 0, 1, \dots, p)$$

ces équations coïncident avec les équations de rang impair du système (8).

De même la combinaison linéaire

$$F'_{2j+1} = \frac{1}{2^{2j+1}}\left[E'_{2j+1} + C^1_{2j+1}(2p+1)E'_{2j} + \dots + C^{2j+1}_{2j+1}(2p+1)^{2j+1}E'_0\right]$$

$$= \frac{(2p+1)^{2j+1}}{2^{2j+1}}\left[\frac{C^1_{2j+1}}{2j+1} + \frac{C^3_{2j+1}}{2j-1} + \dots + \frac{C^{2j+1}_{2j+1}}{1}\right],$$

$$(j = 0, 1, \dots, p)$$

se réduit à

$$\sum_{s=1}^{2p+1} s^{2j+1}\beta_s = \frac{(2p+1)^{2j+1}}{2j+2} \qquad (j = 0, 1, \dots, p)$$

et ces équations sont justement les équations de rang pair du système (8).

Nous avons donc démontré que le système d'équations linéaires (14) est équivalent au système (8).

6. Remarquons sur les équations (13) et (14) que les coefficients β_s sont égaux, deux à deux. D'une façon précise on a

$$\beta_{p-s} = \beta_{p+s} \qquad (s = 1, 2, \dots, p)$$

pour le syetème (13), et

$$\beta_{p-s} = \beta_{p+s+1} \qquad (s = 0, 1, \dots, p)$$

pour le système (14).

En effet, on peut écrire les équations de rang impair dans le système (13) de la façon suivante:

$$\sum_{s=1}^{p} s^{2j-1}\left[\beta_{p+s} - \beta_{p-s}\right] = 0. \qquad (j = 1, 2, \dots, p)$$

Dans ce système d'équations homogènes où les inconnues sont $\beta_{p+s}-\beta_{p-s}$ $(s=1,2,\ldots,p)$, le déterminant du système est différent de zéro, d'où résulte que

$$\beta_{p+s}=\beta_{p-s}.$$

En considérant aussi les équations de rang impair dans le système (14), on démontre de la même façon que

$$\beta_{p+s+1}=\beta_{p-s}.$$

7. Il résulte des propriétés établies plus haut que lorsqu'on part d'un polynôme $\varphi(x)$ de degré pair $n=2p$, l'identité (9) qui généralise l'identité de DARBOUX, est

$$\int_\lambda^\mu \varphi(x)\,dx=(\mu-\lambda)\sum_{s=0}^{p}\alpha_s\left[\varphi\left(\lambda+s\frac{\mu-\lambda}{2p}\right)+\varphi\left(\mu-s\frac{\mu-\lambda}{2p}\right)\right] \tag{17}$$

où les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont donnés par le système d'equations linéaires

$$\begin{aligned}
&\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1}+\alpha_p=\frac{1}{2}\\
&p^2\alpha_0+(p-1)^2\alpha_1+(p-2)^2\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1}=\frac{p^2}{2\,.\,3}\\
&p^4\alpha_0+(p-1)^4\alpha_1+(p-2)^4\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1}=\frac{p^4}{2\,.\,5}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p^{2p}\alpha_0+(p-1)^{2p}\alpha_1+(p-2)^{2p}\alpha_2+\ldots+\alpha_{p-1}=\frac{p^{2p}}{2(2p+1)}
\end{aligned} \tag{18}$$

De même lorsque le degré du polynôme $\varphi(x)$ est impair $n=2p+1$, l'indentité (9) est :

$$\int_\lambda^\mu \varphi(x)\,dx=(\mu-\lambda)\sum_{s=0}^{p}\alpha'_s\left[\varphi\left(\lambda+s\frac{\mu-\lambda}{2p+1}\right)+\varphi\left(\mu-s\frac{\mu-\lambda}{2p+1}\right)\right] \tag{19}$$

où les coefficients $\alpha'_0\ \alpha'_1, \ldots, \alpha'_p$ sont donnés par le système d'équations linéaires

$$\alpha'_0 + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_p = \frac{1}{2}$$

$$(2p+1)^2 \alpha'_0 + (2p-1)^2 \alpha'_1 + (2p-3)^2 \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_p = \frac{(2p+1)^2}{2.3}$$

$$(2p+1)^4 \alpha'_0 + (2p-1)^4 \alpha'_1 + (2p-3)^4 \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_p = \frac{(2p+1)^4}{2.5} \tag{20}$$

. . . .

$$(2p+1)^{2p} \alpha'_0 + (2p-1)^{2p} \alpha'_1 + (2p-3)^{2p} \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_p = \frac{(2p+1)^{2p}}{2.(2p+1)}$$

8. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème énoncé au début de ce travail, c'est à dire: *l'équation fonctionnelle (17) a pour intégrale un polynôme quelconque de degré* $2p+1$.

En effet, si nons intégrons l'équation fonctionnelle (17) suivant la méthode donnée au No. 3, les premières $2p+1$ équations (12) sont satisfaites quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, à cause des équations (13). L'équation de rang $2p+2$ est également satisfaite à cause de la symètrie des coefficients α_s démontrée au No. 6. D'autre part le coefficient de $\varphi^{(2p+2)}_{(h)}$ ne peut pas être nul, car s'il était nul, on aurait aussi

$$p^{2p+2} \alpha_0 + (p-1)^{2p+2} \alpha_1 + \ldots + \alpha_{p-1} = \frac{p^{2p+2}}{2(2p+3)}$$

ce qui est impossible, puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \ldots & p^2 & \frac{p^2}{5} \\ 1 & 2^4 & 3^4 & \ldots & p^4 & \frac{p^4}{7} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2^{2p} & 3^{2p} & \ldots & p^{2p} & \frac{p^{2p}}{2p+3} \end{vmatrix},$$

est différent de zéro

Donc l'intégrale de l'équation fonctionnelle (17) est un polynôme quelconque de degré $2p+1$.

En reprenant le même raisonnement on peut démontrer aussi que *l'intégrale de l'équation fonctionnelle (19) est un polynôme quelconque de degré* $2p+1$.

Applications.

9. *a)* Nous allons donner d'abord une interprétation géomètrique de la formule (17).

On a vu que si $\varphi(x)$ est un polynôme de degré

$$q \leq 2p+1,$$

nous avons

$$(17) \qquad \int_{\lambda}^{\mu} \varphi(x)\,dx = (\mu-\lambda)) \sum_{s=0}^{p} \alpha_s \left[\varphi\left(\lambda + s\,\frac{\mu-\lambda}{2p}\right) + \varphi\left(\mu - s\,\frac{\mu-\lambda}{2p}\right)\right]$$

où les coefficients α_s sont donnés par les équations linéaires (18).

Sur la courbe

$$y = \varphi(x)$$

prenons les points M_i ayant pour abscisses $\lambda + i\frac{\mu-\lambda}{2p}$ $(i=0,1,\ldots,2p)$.

La somme des coefficients α_s étant égale à 1, l'expression

$$\sum_{s=0}^{p} \alpha_s \left[\varphi\left(\lambda + s\,\frac{\mu-\lambda}{2p}\right) + \varphi\left(\mu - s\,\frac{\mu-\lambda}{2p}\right)\right]$$

représente l'ordonnée η_{2p+1} du *barycentre* K_{2p+1} *des masses proportionnelles à* α_i *placées aux points* M_i *et* M_{2p-i} $(i=0,1,\ldots,p)$.

Nous avons donc

$$\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(x)\,dx = (\mu-\lambda)\,\eta_{2p+1},$$

et cette formule montre que *l'aire limitée par un arc* $M_0\,M_{2p}$ *de la courbe* $y=\varphi(x)$ *par l'axe* ox *et par les ordonnées des points* M_0 *et* M_{2p}, *est egale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs* $\overrightarrow{M_0\,M_{2p}}$ *et* $\overrightarrow{K_{2p+1}\,K''_{2p+1}}$, K''_{2p+1} étant la projection du barycentre K_{2p+1} sur l'axe ox.

Cet énoncé étant vrai quelle que soit la position de l'axe ox par rapport à la courbe, il généralise la formule bien connue *d'Archimede* pour l'aire d'un segment de parabole, qu'on obtient en prenant $p=1$ et en passant l'axe ox par les points M_0 et M_2 [3]).

Remarquons encore que le point K''_{2p+1} est le milieu du segment $M''_0\;M''_{2p}$, où M''_0 et M''_{2p} sont les projections de M_0 et M_{2p} sur l'axe ox.

---

[3]) E. GOURSAT Cours d'analyse mathématique Tome I, 1933, p. 163.

b) Pour calculer l'aire limitée par un arc quelconque de la courbe $y=\varphi(x)$, où le degré du polynôme $\varphi(x)$ est au plus $2p+1$, l'axe ox et les ordonnées des extrémités de l'arc, nous pouvons également appliquer la formule (19)

$$(19)\qquad \int_\lambda^\mu \varphi(x)\,dx=(\mu-\lambda)\sum_{s=0}^{p}\alpha'_s\left[\varphi\left(\lambda+s\frac{\mu-\lambda}{2p+1}\right)+\varphi\left(\mu-s\frac{\mu-\lambda}{2p+1}\right)\right]$$

où les coefficients α'_s sont donnés par le système d'équations linéaires (20).

En prenant sur la courbe les points M'_i dont les abscisses sont $\lambda+i\dfrac{\mu-\lambda}{2p+1}$ $(i=0,1,\ldots,2p+1)$, nous déduisons que *l'aire limitée par l'arc de courbe* M'_0, M'_{2p+1}, *l'axe* ox *et les ordonnées des points* M'_0, M'_{2p+1}, *est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs* $\overrightarrow{M'_0\,M'_{2p+1}}$ *et* $\overrightarrow{K'_{2p+2}\,K'''_{2p+2}}$ *où* K'_{2p+2} *est le barycentre des masses* α'_i *placées aux points* M'_i *et* M'_{2p+1-i} $(i=0,1,\ldots,p)$ *et* K'''_{2p+2} *est la projection de* K'_{2p+2} *sur l'axe* ox.

Nous remarquons que le point K'''_{2p+2} est le milieu du segment $M'''_0\,M'''_{2p+1}$, où M'''_0 et M'''_{2p+1} sont les projections de M'_0 et M'_{2p+1} sur l'axe ox.

c) En comparant les deux énoncés précédents il résulte que si nous considérons une courbe $y=\varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est un polynôme de degré $q\leq 2p+1$, sur laquelle nous prenons les points M_i d'abscisses $\lambda+i\dfrac{\mu-\lambda}{2p}$ $(i=0, 1,\ldots, 2p)$ et les points M'_i d'abscisses $\lambda+i\dfrac{\mu-\lambda}{2p+1}$ $(i=0,1,\ldots,2p+1)$, *le barycentre des masses* α_i *placées aux points* M_i *et* M_{2p-i} $(i=0,1,\ldots,p)$, *coïncide avec le barycentre des masses* α'_i *placées aux points* M'_i *et* M'_{2p+1-i} $(i=0, 1,\ldots, p)$.

Par exemple, si le polynôme $\varphi(x)$ est de degré au plus égal à 5, le barycentre des masses 7, 32, 12, 32, 7 placées aux points M_i d'abscisses $\lambda+i\dfrac{\mu-\lambda}{4}$ $(i=0,1,2,3,4)$ coïncide avec le barycentre des masses 19, 75, 50, 50, 75, 19 placées aux points M'_i d'abscisses $\lambda+i\dfrac{\mu-\lambda}{5}$ $(i=0,1,2,3,4,5)$.

10. Voici une autre application géomètrique de la formule (17). Considérons sur la courbe

$$y=\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est un polynôme de degre $2p+1$, les points M_i ayant pour abscisses $\lambda + i \frac{\mu - \lambda}{2p}$ $(i = 0, 1, \ldots, 2p)$, et la courbe, représentée par l'équation

$$y = \varphi_1(x) = C_0 x^{2p} + C_1 x^{2p-1} + \ldots + C_{2p},$$

qui passe par les points $M_0, M_1, \ldots, M_{2p}$. On détermine les coefficients C_i par les équations

$$\varphi_1\left(\lambda + i \frac{\mu - \lambda}{2p}\right) = \varphi\left(\lambda + i \frac{\mu - \lambda}{2p}\right). \quad (i = 0, 1, \ldots, 2p) \tag{21}$$

$\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ satisfont à l'équation (17), et tenant compte des équations (21), nous avons

$$\int_\lambda^\mu \varphi(x)\,dx = \int_\lambda^\mu \varphi_1(x)\,dx.$$

Cette formule montre que si nous désignons par S_i l'aire limitée par les deux arcs de courbe $M_{i-1} M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$, nous avons

$$S_1 + S_3 + \ldots + S_{2p-1} = S_2 + S_4 + \ldots + S_{2p}$$

c'est à dire, *la somme des aires de rang impair est égale à la somme des aires de rang pair.*

11. Faisons maintenant quelques applications relatives au centre de gravité de l'aire limitée par un arc de la courbe representée par l'équation

$$y = \varphi(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n, \tag{22}$$

un arc de la courbe

$$y = \varphi_1(x) = B_0 x^{n'} + B_1 x^{n'-1} + \ldots + B_{n'}, \tag{23}$$

et deux parallèles à l'axe $0y$.

a) Supposons d'abord que n et $n' \leq 2p$. Prenons sur les courbes (22) et (23) les points M_i et N_i ayant pour abscisses

$$x_i = \lambda + i \frac{\mu - \lambda}{2p} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p)$$

et désignons par

$$Y_i = \overline{N_i M_i} = \varphi(x_i) - \varphi_1(x_i).$$

Nons allons démontrer que *le centre de gravité de l'aire limitée par les arcs de courbe* $M_0 M_{2p}$ *et* $N_0 N_{2p}$ *ainsi que par les segments de* *droites* $N_0\,M_0$, $N_{2p}\,M_{2p}$ *a la même abscisse que le barycentre des masses* $\alpha_i\,Y_i$ *et* $\alpha_{p-i}\,Y_{p+i}$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i=0, 1, \ldots, p)$, les coefficients α_i étant donnés par les équations linéaires (18).

En effet l'abscisse du centre de gravité est donnée par la formule

$$\xi = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_\lambda^\mu x\,[\varphi(x) - \varphi_1(x)]\,dx}{\int_\lambda^\mu [\varphi(x) - \varphi_1(x)]\,dx}.$$

Les polynômes $\varphi(x) - \varphi_1(x)$ et $x\,[\varphi(x) - \varphi_1(x)$ étant de degré moindre ou égal à $2p+1$, satisfont à l'équation (17) et par suite nous pouvons écrire.

$$\xi = \frac{\sum_{i=0}^{p} (\alpha_i\,x_i\,Y_i + \alpha_{p-i}\,x_{p+i}\,Y_{p+i})}{\sum_{i=0}^{p} (\alpha_i\,Y_i + \alpha_{p-i}\,Y_{p+i})}$$

ce qui démontre le théorème énoncé plus haut.

Le théorème précédent est encore valable si

$$n = n' = 2p + q;$$

pourvu qu'on ait

$$A_i = B_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, q-1)$$

Par exemple, considérons le trapèze $N_0\,M_0\,M_2\,N_2$ dont les bases parallèles à oy sont $N_0\,M_0$, $N_2\,M_2$ et désignons par N_1 et M_1 les points où la parallèle à oy équidistante de $N_0\,M_0$ et de $N_2\,M_2$ rencontre les droites $N_0\,N_2$ et $M_0\,M_2$. *Le centre de gravité du trapèze a la même abscisse que le barycentre des masses* $N_0\,M_0$, $4\,N_1\,M_1$, $N_2\,M_2$ *placées aux points* M_0, M_1, M_2.

La même règle s'applique si l'on remplace un des segments de droite $M_0\,M_2$, $N_0\,N_2$ ou les deux, par des segments de parabole ayant les axes parallèles aux axes $N_0\,M_0$ et $N_2\,M_2$.

b) Les polynômes $\varphi(x) - \varphi_1(x)$, $x\,[\varphi(x) - \varphi_1(x)]$ étant de degré au plus égal à $2p+1$, satisfont aussi à l'équation (19). Prenons donc sur les courbes représentées par les équations (22) et (23) les points M'_i et N'_i ayant pour abscisses

$$x'_i = \lambda + i\,\frac{\mu - \lambda}{2p+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p+1)$$

et désignons par

$$Y'_i = \overline{N'_i\,M'_i} = \varphi(x'_i) - \varphi_1(x'_i).$$

En reprenant la démonstration précédente nous arrivons à la conclusion suivante:

Le centre de gravité de l'aire $N_0' M_0' M_{2p+1}' N_{2p+1}'$ *a la même abscisse que le barycentre des masses* $\alpha_i' Y_i'$ *et* $\alpha_{p-i}' Y_{p+i+1}'$ *placées aux points* M_i' *et* M_{p+i+1}' $(i = 0, 1, \ldots, p)$, où les coefficients α_i' sont donnés par les équations linéaires (20).

c) En comparant les résultats précédents nous arrivons au théorème suivant:

Si nous prenons sur la courbe representée par l'équation (22), les points M_i ayant pour abscisses

$$x_i = \lambda + i \frac{\mu - \lambda}{2p} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p)$$

et les points M_i' ayant pour abscisses

$$x_i' = \lambda + i \frac{\mu - \lambda}{2p+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p+1)$$

et si nous désignons par Y_i et Y_i' les valeurs du polynôme

$$Y(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x),$$

pour $x = x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, 2p)$ et $x = x_i'$ $(i = 0, 1, \ldots, 2p+1)$, le degré de $Y(x)$ étant au plus égal à $2p$, *le barycentre des masses* $\alpha_i Y_i$ *et* $\alpha_{p-i} Y_{p+i}$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$ *a la même abscisse que le barycentre des masses* $\alpha_i' Y_i'$ *et* $\alpha_{p-i}' Y_{p+i+1}'$ *placées aux points* M_i' *et* M_{p+i+1}' $(i = 0, 1, \ldots, p)$.

Dans cet enoncé les coefficients α_i sont donnés par les équations linéaires (18) et les coefficients α_i' sont donnés par les équations linéaires (20).

Par exemple si nous prenons sur la parabole

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

les points M_0, M_1, M_2 ayant pour abscisses $\lambda, \frac{\lambda+\mu}{2}\, \mu$ et les points M_0', M_1', M_2', M_3' ayant pour abscisses $\lambda, \frac{2\lambda+\mu}{3}, \frac{\lambda+2\mu}{3}, \mu$ et si nous notons par y_0, y_1, y_2 et y_0', y_1', y_2', y_3' leurs ordonnées $(y_0 = y_0', y_2 = y_3')$ *le barycentre des masses* y_0, $4y_1$, y_2 *placées aux points* M_0, M_1, M_2, *a la même abscisse que le barycentre des masses* y_0', $3y_1'$, $3y_2'$, y_3' *placées aux points* M_0', M_1', M_2', M_3'.

12. *a)* Nous allons considérer maintenant l'aire limitée par un arc de la combe (22), l'axe Ox et deux parallèles à l'axe Oy.

Supposons que

$$2n < 2p + 1$$

et sur la courbe prenons les points M_i ayant pour abscisses

$$x_i = \lambda + i\,\frac{\mu - \lambda}{2p} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p)$$

et désignons par y_i leurs ordonnées.

Désignons par K le barycentre des masses $\alpha_i y_i$ et $\alpha_{p-i} y_{p+i}$ placées aux points M_i et M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$ et par K″ sa projection sur l'axe Ox. Nous allons démontrer que *le centre de gravité* G *de l'aire limitée par l'axe de courbe* $M_0 M_{2p}$, *l'axe* Ox *et les ordonnées des points* M_0 *et* M_{2p} *est au milieu du segment* K″ K.

En effet les coordonnées ξ, η du centre de gravité G sont

$$\xi = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_\lambda^\mu xy\,dx}{\int_\lambda^\mu y\,dx}$$

(24)

$$\eta = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{1}{2}\,\frac{\int_\lambda^\mu y^2\,dx}{\int_\lambda^\mu y\,dx}.$$

Dans ces formules y est le polynôme (22). Les degrés des polynômes y, xy, y^2 étant plus petits que $2p + 1$, nous pouvons appliquer la formule (17) et nous aurons

$$\xi = \frac{\sum_{i=0}^{p} (\alpha_i x_i y_i + \alpha_{p-i} x_{p+i} y_{p+i})}{\sum_{i=0}^{p} (\alpha_i y_i + \alpha_{p-i} y_{p+i})}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\,\frac{\sum_{i=0}^{p} (\alpha_i y_i^2 + \alpha_{p-i} y_{p+i}^2)}{\sum_{i=0}^{p} (\alpha_i y_i + \alpha_{p-i} y_{p+i})}$$

ce qui démontre notre théorème.

Par exemple sur la parabole

$$y = A x^2 + B x + C,$$

prenons les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 ayant pour abscisses $\lambda, \frac{3\lambda+\mu}{4}, \frac{\lambda+\mu}{2}, \frac{\lambda+3\mu}{4}, \mu$ et désignons par y_i leurs ordonnées $(i = 0, 1, \ldots, 4)$.

Le centre de gravité de l'aire limitée par l'arc de courbe $M_0 M_4$, l'axe Ox et les ordonnées des points M_0 et M_4 est au milieu du segment $K''K$, où K est le barycentre des masses $7y_0, 32y_1, 12y_2, 32y_3, 7y_4$ placées aux points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 et K'' est la projection de K sur Ox.

b) Nous pouvons appliquer aux intégrales qui figurent dans les formules (24), la formule (19). Nous aurons alors le théorème suivant.

Si nous prenons sur la courbe representée par l'équation (22) les points M'_i ayant pour abscisses

$$x'_i = \lambda + i\,\frac{\mu - \lambda}{2p+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p+1)$$

et nous désignons par y'_i leurs ordonnées, *le centre de gravité de l'aire limitée par l'arc de courbe* $M'_0 M'_{2p+1}$, *l'axe* Ox *et les ordonnées des points* M'_0 *et* M'_{2p+1} *est au milieu du segment* $K'''K'$, *où* K' *est le barycentre des masses* $\alpha'_i y'_i$ *et* $\alpha'_{p-i} y'_{p+i+1}$ *placées aux points* M'_i *et* M'_{p+i+1} $(i = 0, 1, \ldots, p)$ *et* K''' *est la projection de* K' *sur l'axe* Ox.

c) En comparant les théorèmes précédents nous arrivons au résultat suivant :

Si nous prenons sur la combe

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$$

où

$$2n < 2p + 1 \ ,$$

les points M_i ayant pour abscisses

$$x_i = \lambda + i\,\frac{\mu - \lambda}{2p} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p)$$

et les points M'_i ayant pour abscisses

$$x'_i = \lambda + i\,\frac{\mu - \lambda}{2p+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p+1)$$

et nons désignons par y_i et y'_i leurs ordonnées, *le barycentre des masses* $\alpha_i y_i$ *et* $\alpha_{p-i} y_{p+i}$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$, *coincide avec le barycentre des masses* $\alpha'_i y'_i$ *et* α'_{p-i} y_{p+i+1} *placées aux* *points* M'_i *et* M_{p+i+1} $(i = 0, 1, \ldots, p)$, les coefficients α_i étant donnés par les équations linéaires (18) et les coefficients α'_i étant donnés par les équations linéaires (20).

Par exemple, prenons sur la parabole

$$y = A x^2 + B x + C,$$

les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 ayant pour abscisses $\lambda, \dfrac{3\lambda+\mu}{4}, \dfrac{\lambda+\mu}{2}, \dfrac{\lambda+3\mu}{4}, \mu$ et les points $M'_0, M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, M'_5$ ayant pour abscisses $\lambda, \dfrac{4\lambda+\mu}{5}, \dfrac{3\lambda+2\mu}{5}, \dfrac{2\lambda+3\mu}{5}, \dfrac{\lambda+4\mu}{5}, \mu$ et désignons par y_i et y'_i leurs ordonnées.

Le barycentre des masses $7y_0, 32y_1, 12y_2, 32y_3, 7y_4$ *placées aux points* M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 *coïncide avec le barycentre des masses* $19y'_0, 75y'_1, 50y'_2, 50y'_3, 75y'_4, 19y'_5$ *placées aux points* $M'_0, M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, M'_5$.

13. Les résultats précédents peuvent être généralisés en considérant des aires non homogènes.

Considérons comme plus haut l'aire comprise entre les droites $x=\lambda$, $x=\mu$ et les courbes représentées par les équations

$$\begin{aligned} y &= A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n \\ y_1 &= B_0 x^{n'} + B_1 x^{n'-1} + \ldots + B_{n'} \end{aligned} \tag{25}$$

et supposons que la densité soit en chaque point (x, y) de la forme

$$\rho = Q(x)\, R(y)$$

où $Q(x)$ est un polynôme de degré q et $R(y)$ est un polynôme de degré r.

L'abscisse du centre de gravité est donnée par la formule

$$\xi = \frac{\displaystyle\iint x\, Q(x)\, R(y)\, dxdy}{\displaystyle\iint Q(x)\, R(y)\, dxdy} = \frac{\displaystyle\int_\lambda^\mu x\, Q(x)\, S(x)\, dx}{\displaystyle\int_\lambda^\mu Q(x)\, S(x)\, dx}, \tag{26}$$

où nous avons posé

$$S(x) = \int_{y_1}^{y} R(y)\, dy. \tag{27}$$

Dans cette formule y *et* y_1 doivent être remplacés par les formules (25).

Supposons que $n' \leq n$; on voit immédiatement que $S(x)$ est un polynôme en x de degré $n(r+1)$. Les produits $Q(x)S(x)$, $xQ(x)S(x)$ sont des polynômes de dégrés $q+n(r+1)$, $q+1+n(r+1)$. Nous pouvons prendre alors un nombre p tel que

$$q+n(r+1) \leq 2p$$

et appliquer aux intégrales de la formule (26), la formule (17), ou bien la formule (19).

Nous arrivons aux résultats suivants:

Prenons sur les courbes (25) les points M_i et N_i ayant pour abscisses

$$x_i = \lambda + i\,\frac{\mu - \lambda}{2p} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p)$$

et les points M'_i et N'_i ayant pour abscisses

$$x'_i = \lambda + i\,\frac{\mu - \lambda}{2p+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p+1).$$

L'abscisse du centre de gravité de l'aire non homogène comprise entre les arcs de courbe $M_0\,M_{2p}$, $N_0\,N_{2p}$ *et les segments* $M_0\,N_0$, $M_{2p}\,N_{2p}$, *la densité en chaque point* (x, y) *étant*

$$\rho = Q(x)\,R(y),$$

coïncide avec l'abscisse du barycentre des masses $\alpha_i\,Q(x_i)\,S(x_i)$ *et* $\alpha_{p-i}\,Q(x_{p+i})\,S(x_{p+i})$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$, *ou avec l'abscisse du barycentre des masses* $\alpha'_i\,Q(x'_i)\,S(x'_i)$ *et* $\alpha'_{p-i}\,Q(x'_{p+i+1})\,S(x'_{p+i+1})$ *placées aux points* M'_i *et* M'_{p+i+1} $(i=0, 1, \ldots, p)$, $S(x)$ étant le polynôme donné par le formule (27).

14. Considérons maintenant l'aire non homogène comprise entre les droites $x=\lambda$, $x=\mu$, l'axe Ox et la courbe

$$y = A_0\,x^n + A_1\,x^{n-1} + \ldots + A_n \tag{28}$$

et supposons que la densité en chaque point (x, y) soit de la forme

$$\rho = Q(x)\,y^r$$

où $Q(x)$ et un polynôme de degré q.

Les coordonnées du centre de gravité G de cette aire sont

$$(29)\quad \begin{aligned} \xi &= \frac{\displaystyle\iint x\,Q(x)\,y^r\,dxdy}{\displaystyle\iint Q(x)\,y^r\,dxdy} = \frac{\displaystyle\int_\lambda^\mu x\,Q(x)\,y^{r+1}\,dx}{\displaystyle\int_\lambda^\mu Q(x)\,y^{r+1}\,dx} \\ \eta &= \frac{\displaystyle\iint y\,Q(x)\,y^r\,dxdy}{\displaystyle\iint Q(x)\,y^r\,dxdy} = \frac{r+1}{r+2}\,\frac{\displaystyle\int_\lambda^\mu Q(x)\,y^{r+2}\,dx}{\displaystyle\int_\lambda^\mu Q(x)\,y^{r+1}\,dx} \end{aligned}$$

Dans ces formules y doit être remplacé par le polyônme (28). Les polynômes $Q(x)\,y^{r+1}$, $x\,Q(x)\,y^{r+1}$, $Q(x)\,y^{r+2}$ sont de deprés $q+(r+1)\,n$, $q+1+(r+1)\,n$, $q+(r+2)\,n$.

Nous pouvons prendre alors un nombre p tel que

$$q+(r+2)\,n \leq 2\,p+1$$

et appliquer aux intégrales des formules (29), la formule (17) ou la formule (19)

Nous aurons alors les résultats suivants:

Prenons sur la courbe représentee par l'équation (28) les points M_i ayant pour abscisses

$$x_i = \lambda + i\,\frac{\mu-\lambda}{2p} \qquad (i=0,1,\ldots,2p)$$

et les points M'_i ayant pour abscisses

$$x'_i = \lambda + i\,\frac{\mu-\lambda}{2p+1}, \qquad (i=0,1,\ldots,2p+1)$$

et désignons par y_i et y'_i leurs ordonnées.

Le barycentre K *des masses* $\alpha_i\,Q(x_i)\,y_i^{r+1}$ *et* $\alpha_{p-i}\,Q(x_{p+i})\,y_{p+i}^{r+1}$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i=0,1,\ldots,p)$ *coïncide avec le barycentre* K′ *des masses* $\alpha'_i\,Q(x'_i)\,y'^{\,r+i}_{p+i}$ et $\alpha'_{p-i}\,Q(x'_{p+i+1})\,y'^{\,r+1}_{p+i+1}$ *placées aux points* M'_i *et* M'_{p+i+1} $(i=0,1,\ldots,p)$.

Le centre de gravité G *de l'aire non homogène limitée par l'arc de courbe* $M_0\,M_{2p}$, *l'axe* O x *et les ordonnées des points* M_0 *et* M_{2p} *se* *trouve sur la droite* $K''K$, *où* K'' *est la projection de* K *sur axe* Ox, *et l'on a*

$$\overline{K''G} = \frac{r+1}{r+2}\,\overline{K''K}.$$

15. Nous allons finir ces applications en considérant les moments d'inertie d'une aire homogène limitée par les droites $x=\lambda$, $x=\mu$, l'axe Ox et la courbe représentée par l'équation

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$$

a) Considérons d'abord le rayon de gyration de l'aire par rapport à l'axe Oy; il est donné par la formule

$$\rho_x^2 = \frac{\displaystyle\int_\lambda^\mu x^2 y dx}{\displaystyle\int_\lambda^\mu y dx}.$$

Les polynômes y et $x^2 y$ sont de degrés n et $n+2$; en prenant un nombre p tel que

$$n+1 \leq 2p$$

nous pouvons appliquer la formule (17) ou la formule (19).

Prenons sur la courbe les points M_i ayant pour abscisses

$$x_i = \lambda + i\,\frac{\mu-\lambda}{2p} \qquad (i=0, 1, \ldots, 2p)$$

et désignons par y_i leurs ordonnées.

Nous avons le théorème suivant:

Le rayon de gyration de l'aire comprise entre l'arc de courbe $M_0 M_{2p}$, *l'axe* ox *et les ordonnées des points* M_0 *et* M_{2p}, *par rapport à l'axe* oy, *est égal au rayon de gyration d'un système matériel fictif formé par les masses* $\alpha_i\, y_i$ *et* $\alpha_{p-i}\, y_{p+i}$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i=0, 1, \ldots, p)$, *par rapport à l'axe* Oy.

On a un énoncé analogue en appliquant la formule (19).

Par exemple, *le rayon de gyration d'un trapèze* $N_0 M_0 M_2 N_2$ *par rapport à un axe* Δ *parallèle aux bases* $N_0 M_0$ *et* $N_2 M_2$ *est égal au rayon de gyration des masses* $N_0 M_0$, $4 N_1 M_1$, $N_2 M_2$ *placées aux points* M_0, M_1, M_2 *par rapport à l'axe* Δ, M_1 *et* N_1 *étant les milieux des segments* $M_0 M_2$ *et* $N_0 N_2$.

b) Calculons maintenant le rayon de gyration de l'aire précédente par rapport à l'axe Ox; il est donné par la formule

$$\rho_y^2 = \frac{1}{3} \frac{\displaystyle\int_\lambda^\mu y^3\, dx}{\displaystyle\int_\lambda^\mu y\, dx}.$$

En prenant un nombre p tel que

$$3n \leq 2p + 1 ,$$

nous pouvons appliquer aux intégrales précédentes la formule (17) ou la formule (19).

Prenons sur la courbe précédente les points M_i ayant pour abscisses

$$x_i = \lambda + i\frac{\mu - \lambda}{2p} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p)$$

et désignons par y_i leurs ordonnées.

Le rayon de gyration de l'aire comprise entre l'arc de courbe $M_0\, M_{2p}$, *l'axe* $O\,x$ *et les ordonnées des points* M_0 *et* M_{2p}, *par rapport à l'axe* $O\,x$, *est égal à* $\frac{1}{\sqrt{3}}\, \rho'_y$, *où* ρ'_y *est le rayon de gyration d'un système matériel fictif formé par les masses* $\alpha_i\, y_i$ *et* $\alpha_{p-i}\, y_{p+i}$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i = 0, 1, \ldots, p)$ *par rapport à l'axe* $O\,x$.

On a un énoncé analogue si nous appliquons la formule (19).

Par exemple, *le rayon de gyration d'un trapèze* $N_0\, M_0\, M_2\, N_2$ *dont les bases sont* $N_0 M_0$ et $N_2 M_2$ *par rapport à* $N_0 N_2$ *est égal à* $\frac{1}{\sqrt{3}}\, \rho'_y$, *où* ρ'_y *est le rayon de gyration des masses* N_0M_0, $4\,N_1M_1$, N_2M_2 *placées aux points* M_0, M_1, M_2 *par rapport à* N_0N_2, N_1 *et* M_1 *étant les milieux de* N_0N_2 *et* M_0M_2

c) On peut considérer aussi l'expression

$$a = \frac{\sum m\,x\,y}{\sum m}$$

égale, au produit d'inertie de l'aire précédente, $\sum m\,x\,y$, divisé par la masse de cette aire.

Nous avons

$$a = \frac{1}{2} \frac{\displaystyle\int_{\lambda}^{\mu} xy^2 \, dx}{\displaystyle\int_{\lambda}^{\mu} y \, dx}.$$

Si nons prenons donc un nombre p tel que

$$n \leqq p,$$

nons pouvons appliquer la formule (17) ou la formule (19).

Il résulte alors que si nous prenons sur la courbe les points M^i ayant pour abscisses

$$x_i = \lambda + i \frac{\mu - \lambda}{2p} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p)$$

le produit d'inertie $\sum mxy$ *de l'aire limitée par l'arc de combe* M_0M_{2p} *l'axe* ox *et les ordonnées des points* M_0 *et* M_{2p}, *divisé par la masse de cette aire, est égal à* $\frac{1}{2}$ a' *où* a' *est le produit d'inertie* $\sum mxy$ *du système matériel fictif formé par les masses* $\alpha_i \, y_i$ *et* $\alpha_{p-i} \, y_{p+i}$ *placées aux points* M_i *et* M_{p+i} $(i=0, 1, \ldots, p)$ *divisé par la masse de ce système.*

On a un théorème analogue en appliquant la formule (19).

Par exemple, *le produit d'inertie* $\sum mxy$ *d'un trapèze* $N_0M_0M_2N_2$ *divisé par la masse du trapèze, les axes étant parallèles à* N_0N_2 *et* N_0M_0, *est ègal à* $\frac{1}{2}$ a', *où* a' *est le produit d'inertie du système formé par les masses* N_0M_0, $4N_1M_1$, N_2M_2 *placées aux points* M_0, M_1, M_2 *et divisé par la masse de ce système.*