BULETINUL SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE DIN CLUJ (ROMÂNIA)
BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE CLUJ (ROUMANIE)
Tome IX, pag. 294—298.
17 mai 1939.

QUELQUES APPLICATIONS DES PROPRIÉTÉS D'UNE FAMILLE DE TRAJECTOIRES

par

D. V. Ionesco
Professeur à l'Université de Cluj.

Reçue le 19 Oct. 1938.

1. Considérons un point matériel M qui décrit une trajectoire et désignons par $\overrightarrow{J}$, $\overrightarrow{F}$ l'accélération et la force en M et par C le centre de courbure correspondant. Soient P la projection de C sur MJ et Q la projection de l'extrémité de l'accélération sur la normale MC.

On a l'égalité

$$MP.J = MQ.MC\,;$$

mais

$$MQ = \frac{v^2}{MC},$$

d'où résulte que

$$\boxed{MP = \frac{mv^2}{F}}. \tag{1}$$

Considérons maintenant une famille de trajectoires décrites par un point matériel M, lancé d'une même position initiale M_0, avec la même vitesse v_0, mais de direction arbitraire, la force F dépendant seulement de la position du point matériel. La formule (1) montre que

$$MP = \frac{mv_0^2}{F_0} = \text{const.}$$

et par suite: *le lieu géométrique des centres de courbure en* M_0 *de toutes ces trajectoires est un plan perpendiculaire sur la force* $\overrightarrow{F_0}$ *mené à une distance* $\frac{mv_0^2}{F_0}$ *de* M_0.

Lorsque les trajectoires sont planes le lieu précédent est une droite.

2. Comme exemple, considérons les paraboles décrites par un point matériel pesant lancé dans le vide du point O avec une vitesse v_0 faisant un angle variable avec l'axe Ox. Le centre de courbure d'une parabole au point O sera sur la normale OC à une distance $\frac{v_0^2}{g}$ de l'axe Ox. Mais on sait que la distance du point O au foyer F de la parabole est $\frac{v_0^2}{2g}$, de sorte que $\mathrm{OP} = 2\mathrm{OF}$.

Il résulte que pour construire le centre de courbure C, on prend sur la parallèle à l'axe de la parabole menée par le point O la distance $\mathrm{OP} = 2\mathrm{OF}$, et la perpendiculaire à l'axe menée par P rencontrera la normale au point C.

On retrouve ainsi une construction classique du centre de courbure de la parabole.

Si nous coupons les paraboles précédentes par une parallèle à Ox, *le lieu géométrique des centres de courbure correspondants aux points d'intersection est une parallèle à* Ox.

En effet en gardant les mêmes notations que plus haut, on a

$$\mathrm{MP} = \frac{v^2}{g}\cdot$$

Mais d'après le théorème des forces vives, on a

$$v^2 = v_0^2 - 2gy$$

de sorte que

$$\mathrm{MP} = \frac{v_0^2 - 2gy}{g} = \text{const.}$$

Remarque. Cette propriété a lieu aussi pour toutes les trajectoires décrites par un point M lancé de O avec une vitesse v_0 faisant avec Ox un angle variable, la force étant perpendiculaire à Ox et fonction seulement de l'ordonnée y.

3. Ayant en vue une nouvelle application de la formule (1), traitons d'abord le probleme suivant.

Un point matériel pesant, est abandonné sans vitesse sur la partie extérieure d'une conique située dans un plan vertical, l'axe *focale étant horizontal. Déterminer le point de la conique où le point matériel quitte la conique* (¹) (point d'échappement).

Supposons que l'origine O des axes est placée dans le foyer de la conique et prenons l'axe focal comme axe Ox. Désignons par e l'excentricité de la conique et par $x=a$ l'équation de la directrice correspondante. L'équation de la conique est

$$x^2+y^2=e^2(x-a)^2. \tag{2}$$

Le théorème des forces vives nous donne

$$v^2+2gy=2gh, \tag{3}$$

h étant l'ordonnée de la position initiale M_0.

Le point d'échappement M_1 de la conique est le point où la réaction s'annule.

On calcule la réaction N au moyen des équations du mouvement

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=N_x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=N_y-mg.$$

Les cosinus directeurs de la normale étant

$$\frac{ae^2+x(1-e^2)}{\sqrt{y^2+[ae^2+x(1-e^2)]^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{y^2+[ae^2+x(1-e^2)]^2}}$$

la réaction est donnée par

$$N=\frac{m}{\sqrt{y^2+[ae^2+x(1-e^2)]^2}}\left\{[ae^2+x(1-e^2)]\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+g\right)y\right\}.$$

Le point d'échappement M_1 est donné par l'équation

$$[ae^2+x(1-e^2)]\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+g\right)y=0. \tag{4}$$

En dérivant l'équation (2) deux fois par rapport à t nous avons

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=e^2(x-a)\frac{dx}{dt}$$

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}-e^2(x-a)\frac{d^2x}{dt^2}=e^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-v^2.$$

(¹) Ce problème se trouve énoncé pour le cas de la *parabole* dans le vol. I du Traité de Mécanique Rationnelle de P. APPELL, page 479. 5-e édition. Ici nous traitons le cas d'une conique quelconque.

Tenant compte de cette dernière équation, l'équation (4) devient

$$e^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - v^2 + gy = 0$$

et en remplaçant v^2 par sa valeur tirée de l'équation (3), on a

$$e^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3gy = 2gh. \tag{5}$$

D'autre part, l'équation (3) s'écrie de la façon suivante

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left[\frac{ae^2+x(1-e^2)}{y}\right]^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2g(h-y)$$

ou bien

$$\{y^2+[ae^2+x(1-e^2)]^2\}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2gy^2(h-y).$$

Mais

$$y^2+[ae^2+x(1-e^2)]^2 = e^2(a^2+y^2)$$

de sorte que

$$e^2(a^2+y^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2gy^2(h-y). \tag{6}$$

En éliminant $e^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ entre les équations (5) et (6) nous avons l'équation

$$(2h-3y)(a^2+y^2) = 2y^2(h-y)$$

ou bien

$$\boxed{y^3+3a^2y-2ha^2=0}\,. \tag{7}$$

L'ordonnée y du point d'échappement M est donc égale à la racine positive de cette équation.

Il est important de remarqer que cette équation est indépendante de l'excentricité e de la conique. Il résulte que *si nous considérons toutes les coniques qui ont le même foyer* O *et même directrice, la droite* $x=a$, *et si nous abandonnons sur la partie extérieure de chaqu'une d'elles des points matériels pesants, l'ordonnée de la position initiale étant la même h pour tous ces points, le lieu des points d'échappements est une droite parallèle à l'axe* Ox *à une distance de* Ox *égale à la racine positive de l'équation* (7).

Les points matériels aux moments où ils quittant les coniques ont la même vitesse

$$v_1^2 = 2g(h-y_1) \tag{8}$$

inédpendante de l'excentricité de la conique.

4. Cherchons maintenant le lieu géométrique des centres de courbure C_1 correspondant aux points d'échappement.

Soit P la projection du centre de courbure C_1 sur la perpendiculaire à Ox menée par M_1. D'aprés la formule (1), nous avons

$$M_1P = \frac{mv_1^2}{mg} = \frac{2g(h-y_1)}{g}$$

ou

$$\boxed{M_1P = 2(h-y_1)}, \tag{9}$$

au point M_1 la force est normale à Ox et est égale à mg, la réaction de la courbe étant nulle.

La formule (9) montre que le lieu du centre de courbure C_1 est une droite parallèle à Ox.

Remarque. On peut choisir h de façon que l'ordonnée du point M_1 soit donnée. D'où résulte le théorème suivant:

Si l'on coupe la famille de coniques

$$x^2+y^2=e^2(x-a)^2$$

où e varie, par une parallèle à Ox, *le lieu géométrique des centres de courbure correspondant aux points d'intersection est une droite parallèle à* Ox.

5. De cette propriété découle une construction simple du centre de courbure d'une conique.

Désignons par O le foyer de la conique, par D la directrice correspondante et par I la projection de M sur D. Prenons sur MI le point M′ de façon que OM′ soit égal à M′I. Lorsque M décrit la conique, M′ décrit une parabole qui a le point O comme foyer et D comme directrice. On sait construire le centre de courbure C′ de la parabole au point M′. Il suffit de prendre sur MI le point P′ de manière que MP′ = 2M′I et de mener par P′ une parallèle à D qui rencontrera la parallèle menée par M′ à OI au point C′.

Enfin la parallèle à l'axe focal menée par C′ rencontrera la normale en M à la conique au centre de courbure C.