ACADÉMIE ROUMAINE

BULLETIN

DE LA

SECTION SCIENTIFIQUE

PUBLIÉ PAR LES SOINS DES SÉCRÉTAIRES DE LA SECTION

MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

ST. C. HEPITES
DE 1912 À 1919

GR. ANTIPA
DE 1919 À 1939

ET

TRAJAN SAVULESCO

TOME XXI-ÈME

1938—1939

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ, BUCUREŞTI, 1939

L'APPLICATION D'UNE FORMULE DE T. J. STIELTJES À UN PROBLÈME DE M. D. POMPEIU

PAR

D. V. IONESCO

PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLUJ

Note présentée par M. D. Pompeiu M. A. R. dans la séance du 12 mai 1939.

Monsieur le Professeur D. Pompeiu a déduit de la formule des accroissements finis l'équation fonctionnelle [1])

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

dont la solution est un polynome du second degré.

Le but de cette note est de généraliser ce procédé et obtenir, par cette voie, une propriété caractéristique d'un polynome quelconque, de degré n.

1. Thomas Jan Stieltjes [2]) a démontré que si $f(x)$ est une fonction finie et continue dans l'intervalle (a, b) ainsi que les dérivées $f'(x), \dots, f^{(n-1)}_{(x)}$ et si $f^{(n-1)}_{(x)}$ a une dérivée $f^{(n)}_{(x)}$ finie et déterminée, il existe

$$\frac{f(x)}{\psi'(x)} + \frac{f(x_1)}{\psi'(x_1)} + \dots + \frac{f(x_n)}{\psi'(x_n)} = \frac{1}{n!} \overset{n}{f}(\xi), \tag{1}$$

formule où $x, x_1, \dots, x_n$ sont $n + 1$ valeurs de l'intervalle (a, b), $\psi(z)$ est

$$(z - x)\ (z - x_1) \dots\ (z - x_n)$$

le produit et ξ est un nombre compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $x, x_1, \dots, x_n$.

Pour $n = 1$, la formule précédente se ramène à la formule classique des accroissements finis.

---

1) D. Pompeiu, *Sur une equation fonctionelle* (C. R. de l'Académie des Sciences de Paris. Tome 190, 1930 p. 1107).

2) Thomas Jan Stieltjes. *Oeuvres complètes*, Tome I, p. 47.

Nous écrirons la formule (1) sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} f(x) & x^{n-1} & \dots & 1 \\ f(x_1) & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(x_n) & x_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{n!} f^{(n)}(\xi) \tag{2}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^{n} & x^{n-1} & \dots & 1 \\ x_1^{n} & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{n} & x_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{3}$$

2. Nous allons démontrer que si nous remplaçons dans la formule (2) $f(x)$ par un polynome quelconque de degré $n + 1$, alors

$$\boxed{\xi = \frac{x + x_1 + \dots + x_n}{n + 1.}} . \tag{4}$$

En effet, en remplaçant dans la formule (2), la fonction $f(x)$ par

$$f(x) = A_0\, x^{n+1} + A_1\, x^n + \dots + A_{n+1},$$

le premier membre de cette formule devient

$$F(x) = A_0 \begin{vmatrix} x^{n+1} & x^{n-1} & \dots & 1 \\ x_1^{n+1} & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{n+1} & x_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} + A_1 \begin{vmatrix} x^{n} & x^{n-1} & \dots & 1 \\ x_1^{n} & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{n} & x_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

et tenant compte de la formule

$$\begin{vmatrix} x^{n+1} & x^{n-1} & \dots & 1 \\ x_1^{n+1} & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \Delta\,(x + x_1 + \dots + x_n),$$

nous avons

$$F(x) = \Delta\,[A_0\,(x + x_1 + \dots + x_n) + A_1]$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = (n + 1)\,A_0\,\xi + A_1.$$

La formule (2) donnera ensuite

$$A_0(x + x_1 + \ldots + x_n) + A_1 = (n + 1) A_0 \xi + A_1,$$

d'où résulte que ξ a la valeur donnée par la formule (4).

3. Nous allons démontrer maintenant que la propriété exprimée par la formule (4) est caractéristique pour les polynomes de degré $n + 1$, en intégrant l'équation fonctionnelle

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} f(x) & x^{n-1} & \ldots & 1 \\ f(x_1) & x_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ | & | & & | \\ f(x_n) & x_n^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{n!} f^{(n)} \left(\frac{x + x_1 + \ldots x_n}{n + 1} \right)$$

qui pour $n = 1$, se réduit à l'équation fonctionnelle de M. le Professeur D. Pompeiu.

Nous chercherons l'intégrale de l'équation fonctionnelle (5), en supposant la fonction $f(x)$ finie et continue ainsi que ses dérivées $f'(x), \ldots f^{(n-1)}_{(x)}$ et que $f^{(-1)}_{(x)}$ a une dérivée $f^{(n)}_{(x)}$ finie et déterminée. Nous supposons encore que l'équation fonctionnelle (5) doit être satisfaite quelles que soient les variables $x, x_1, \ldots, x_n$.

4. Remarquons que l'intégrale $f(x)$ de l'équation (5) a des dérivées de tout ordre.

En effet remplaçons dans l'équation (5), la variable x par la valeur tirée de

$$\frac{x + x_1 + \ldots + x_n}{n + 1} = u;$$

l'équation devient

$$(6) \quad f^{(n)}_{(u)} = \frac{n!}{\Delta} \begin{vmatrix} f[(n+1)u-(x_1+\ldots+x_n)] & [(n+1)u-(x_1+\ldots+x_n)]^{n-1} & \ldots & 1 \\ f(x_1) & x_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ | & | & & | \\ f(x_n) & x_n^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} [(n+1)u-(x_1+\ldots+x_n)]^n & [(n+1)u-(x_1+\ldots+x_n)]^{n-1} & \ldots & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ | & | & & | \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

D'après les hypothèses faites, le second membre de la formule (6), a une dérivée par rapport à u, il en résulte que $f^{(n)}_{(u)}$ a une dérivée $f^{(n+1)}_{(u)} \ldots$ et on démontre de la même manière l'existence des dérivées successives $f^{(n+2)}_{(u)}$, $f^{(n+3)}_{(u)}, \ldots$

5. Passons maintenant à l'intégration de l'équation fonctionnelle (5). Posons

$$\frac{x + x_1 + \ldots + x_n}{n+1} = u,$$

et

$$x = u + k, \qquad x_1 = u + k_1, \; \ldots, \qquad x_n = u + k_n .$$

Les nombres $k, k_1, \ldots, k_n$ satisfont à la relation

(7) $$k + k_1 + \ldots + k_n = 0 .$$

L'équation fonctionnelle (5) devient

$$\begin{vmatrix} f(u+k) & k^{n-1} \ldots & 1 \\ f(u+k_1) & k_1^{n-1} \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(u+k_n) & k_n^{n-1} \ldots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^n & k^{n-1} & \ldots & 1 \\ k_1^n & k_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_n^n & k_n^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} \frac{f^{(n)}(u)}{n!}$$

et en développant les fonctions $f(u+k), f(u+k_1), \ldots, f(u+k_n)$ suivant les puissances de $k, k_1, \ldots, k_n$ l'équation précédente devient

$$\begin{vmatrix} f(u) + \frac{k}{1} f'(u) + \ldots + \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}_{(u)} + \frac{k^n}{n!} f^{(n)}_{(u)} + \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}_{(u)} + \ldots & k^{n-1} \ldots & 1 \\ f(u) + \frac{k_1}{1} f'(u) + \ldots + \frac{k_1^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}_{(u)} + \frac{k_1^n}{n!} f^{(n)}_{(u)} + \frac{k_1^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}_{(u)} + \ldots & k_1^{n-1} \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(u) + \frac{k_n}{1} f'(u) + \ldots + \frac{k_n^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}_{(u)} + \frac{k_n^n}{n!} f^{(n)}_{(u)} + \frac{k_n^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}_{(u)} + \ldots & k_n^{n-1} \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k^n & k^{n-1} & \ldots & 1 \\ k_1^n & k_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_n^n & k_n^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} \frac{f^{(n)}(u)}{n!}$$

En faisant les réductions cette équation devient

(8) $$\begin{vmatrix} k^{n+1} & k^{n-1} \ldots & 1 \\ k_1^{n+1} & k_1^{n-1} \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_n^{n+1} & k_n^{n-1} \ldots & 1 \end{vmatrix} \frac{f^{(n+1)}_{(u)}}{(n+1)!} + \begin{vmatrix} k^{n+2} & k^{n-1} & \ldots & 1 \\ k_1^{n+2} & k_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_n^{n+2} & k_n^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} \frac{f^{(n+2)}_{(u)}}{(n+2)!} + \ldots = 0.$$

Cette équation doit être satisfaite quelles que soient les valeurs de $k, k_1, \ldots, k_n$ liées par la relation (7) et quelle que soit la valeur de u.

Remarquons d'abord que le coefficient de $f_{(u)}^{(n+1)}$ est nul parce que

$$\begin{vmatrix} k^{n+1} & k^{n-1} \ldots & 1 \\ k_1^{n+1} & k_1^{n-1} \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_n^{n+1} & k_n^{n-1} \ldots & 1 \end{vmatrix} = (k+k_1+\ldots+k_n) \begin{vmatrix} k^{n} & k^{n-1} \ldots & 1 \\ k_1^{n} & k_1^{n-1} \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_n^{n} & k_n^{n-1} \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

et que le coefficient de $f_{(u)}^{(n+2)}$ est différent de zéro, parce que

$$\begin{vmatrix} k^{n+2} & k^{n-1} \ldots & 1 \\ k_1^{n+2} & k_1^{n-1} \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_n^{n+2} & k_n^{n-1} \ldots & 1 \end{vmatrix} = \frac{k^2 + k_1^2 + \ldots + k_n^2}{2} \begin{vmatrix} k^{n} & k^{n-1} \ldots & 1 \\ k_1^{n} & k_1^{n-1} \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_n^{n} & k_n^{n-1} \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Il résulte alors de l'équation (8), qu'on doit avoir

$$f_{(u)}^{(n+2)} = 0,$$

et par suite l'intégrale de l'équation fonctionnelle (5) est un polynome quelconque de degré $n+1$.

La proposition énoncée au No. 3 est donc démontrée.