

NOTE SUR LES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR (VIII)

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Note présentée par Mr S. Stoilov, M. c. A. R., dans la séance du 14 juillet 1939.

SUR LA DÉFINITION LOCALE DES FONCTIONS D'ORDRE n

1. Soit E un ensemble quelconque $a = \min E$, $b = \max E$ les extrémités (éventuellement) de E . Si E est fermé il est nécessairement *presque-fermé*. L'ensemble $\bar{E}$ de E est l'ensemble $\bar{E}$ et son dérivé E' sauf les extrémités a , b qui n'appartiennent pas à $\bar{E}$. Si $E = \bar{E}$ nous dirons que l'ensemble E est *presque-fermé*. Nous dirons qu'un sous-ensemble E_1 de E est une *section* de E si ou bien il est formé par un seul point ou bien avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_1$ tous les points de E appartenant à l'intervalle (x_1, x_2) appartiennent à E_1 ¹⁾. Si deux sections de E ont au moins un point commun leur réunion et leur intersection sont encore des sections de E . Si deux sections de E n'ont pas de points communs tout point de l'une est à gauche de tous les points de l'autre. Dans ce cas elles sont ou bien *séparées* par E , donc leur réunion n'est pas une section, ou bien sont deux sections consécutives, donc leur réunion est encore une section de E .

Le voisinage V_x^k d'un point x est une section de E ayant au moins k points à gauche et au moins k points à droite de x . S'il y a seulement $r < k$ ($r > 0$) points de E à gauche (à droite) de x , V_x^k doit contenir tous ces points et au moins $2k - r$ points à droite (à gauche) de x . De plus les voisinages V_a^k doivent contenir avec $x_1 \in V_a^k$ tous les points de E appartenant à l'intervalle fermé (a, x_1) . Il en est de même pour les voisinages V_b^k . Dans cette définition k est un nombre naturel, donc si $x \in E$ on a $x \in V_x^k$. Dans la suite nous ne considérons d'ailleurs que des voisinages V_x^k où $x \in E$. Lorsqu'on considère plusieurs voisinages V_x^k ils sont pris tous pour la même valeur de k . Il est alors inutile de considérer des ensembles E ayant moins de $2k + 2$ points.

¹⁾ Dans la note VI nous avons donné une définition un peu différente de la section. Dans cette note E était toujours fermé et nous n'avions besoin que de sections fermées de E .

2. Deux voisinages V_x^k correspondants à un même point x ont au moins $2k$ points communs ¹⁾. Considérons maintenant un voisinage $V_{x_0}^k$ et soit $x_1 \in V_{x_0}^k$ un point à droite de x_0 . Supposons de plus que $V_{x_0}^k$ a encore au moins $s \geq 0$ points à droite de x_1 . Considérons un voisinage $V_{x_1}^k$ de x_1 et voyons combien de points peut-il avoir en commun avec $V_{x_0}^k$. On voit immédiatement que $V_{x_0}^k, V_{x_1}^k$ ont au moins $\min(s, k)$ points en commun à droite de x_1 . S'il y a au moins k points de E à gauche de x_1 , $V_{x_0}^k, V_{x_1}^k$ ont au moins k points communs à gauche de x_1 . Il reste à voir ce qui se passe s'il y a seulement $r < k$ points de E à gauche de x_1 . Dans ce cas $s > 2k - r$ et $V_{x_0}^k, V_{x_1}^k$ ont au moins $2k - r$ points communs à droite de x_1 et ont en commun tous les points de E à gauche de x_1 . Dans tous les cas on peut affirmer que $V_{x_0}^k, V_{x_1}^k$ ont au moins $\min(s, k) + k + 1$ points communs. Une propriété analogue subsiste si $x_1 < x_0$, donc

Lemme I. Si $V_{x_0}^k$ est un voisinage d'un point x_0 de $\bar{E}$ et $V_{x_1}^k$ un voisinage d'un point x_1 de $V_{x_0}^k$, les ensembles $V_{x_0}^k, V_{x_1}^k$ ont au moins $\min(s, k) + k + 1$ points communs, en supposant que $V_{x_0}^k$ a au moins $s(\geq 0)$ points à droite de x_1 si $x_0 < x_1$ ou à gauche de x_1 si $x_1 < x_0$.

Corollaire I. Si E n'a aucun point compris entre x_0, x_1 , deux voisinages $V_{x_0}^k, V_{x_1}^k$ ont au moins $2k$ points communs.

3. Considérons maintenant deux voisinages $V_p^k, V_q^k, p \leq q$, qui ne sont pas séparées par E . Nous distinguons les quatre cas suivants:

- 1° V_p^k, V_q^k ont au moins $2k$ points communs,
- 2° V_p^k, V_q^k ont $r, k \leq r < 2k$, points communs,
- 3° V_p^k, V_q^k ont $r, 1 \leq r < k$, points communs,
- 4° V_p^k, V_q^k n'ont pas de points communs.

Lorsque $p = q$ nous sommes dans le cas 1°. Pour les cas 2°, 3°, 4° il faut donc que $p < q$. Dans le cas 2° soient $x_1 < x_2 < \dots < x_r$ les points communs de V_p^k, V_q^k . Considérons les voisinages quelconques $V_{x_1}^k, V_{x_2}^k, \dots, V_{x_r}^k$. Dans la suite

$$(I) \quad V_{x_1}^k, V_{x_2}^k, \dots, V_{x_r}^k$$

deux termes consécutifs ont au moins $2k$ points communs, en vertu du corollaire I. Si p coïncide avec un point $x_i, V_p^k, V_{x_i}^k$ ont au moins $2k$ points communs. Dans le cas contraire on a $p < x_1$ ou $x_r < p$ et les ensembles $V_p^k, V_{x_1}^k$ ou $V_p^k, V_{x_r}^k$ ont au moins $2k$ points communs. Il en est de même pour V_q^k . Si $p < q \leq x_1$ ou $x_r \leq p < q, V_p^k, V_q^k$ ont au moins $2k$ points communs et nous sommes en réalité dans le cas 1°. Examinons le cas 3°.

¹⁾ Ceci suffit pour nos considérations. En réalité les deux voisinages ont au moins $2k + 1$ points communs et même toujours une infinité si $x \in E'$.

Soient encore $x_1 < x_2 < \dots < x_r$ les points communs de V_p^k, V_q^k et soient (I) des voisinages quelconques. Les mêmes considérations s'appliquent qu'auparavant sauf que nous pouvons affirmer seulement que $V_p^k, V_{x_1}^k$ ou $V_p^k, V_{x_r}^k$ ont au moins $k + r$ points communs, ces couples de voisinages sont donc dans le cas 1° ou 2°. Il en est de même pour V_q^k . Si $p < q \leq x_1$ ou $x_r \leq p < q, V_p^k, V_q^k$ ont au moins $k + r$ points communs et nous sommes en réalité dans le cas 1° ou 2°. Il nous reste le cas 4°. Dans ce cas soit d l'extrémité droite de V_p^k et V_d^k un voisinage quelconque de d . On voit immédiatement que les deux voisinages V_p^k, V_{hd} et les deux voisinages V_d^k, V_q^k sont dans le cas 1°, 2° ou 3°:

L'analyse précédente nous montre qu'on peut énoncer le

Lemme II. Si $V_p^k, V_q^k, p < q$ sont deux voisinages qui ne sont pas séparées par E , ou bien ils ont au moins $2k$ points communs, ou bien on peut trouver un nombre fini de points $x_1, x_2, \dots, x_m$ de E tels que, si $V_{x_i}^k$ sont des voisinages quelconques, dans la suite

$$V_p^k, V_{x_1}^k, V_{x_2}^k, \dots, V_{x_m}^k, V_q^k$$

deux termes consécutifs aient au moins $2k$ points communs.

4. Attachons à chaque $x \in \bar{E}$ un voisinage V_x^k et soit $\mathcal{V}$ l'ensemble de ces voisinages. Si $a, b \in E$ la presque-fermeture $\bar{E}$ coïncide avec la fermeture $\bar{E}$ de E , donc est un ensemble fermé. On peut dans ce cas appliquer le théorème de Borel-Lebesgue et choisir dans $\mathcal{V}$ un nombre fini de termes recouvrant entièrement l'ensemble $\bar{E}$, donc à fortiori l'ensemble E . Ces termes peuvent évidemment être rangés dans une suite de manière que deux consécutifs ne soient pas séparés par E . Compte tenant du lemme II nous en déduisons le

Lemme III. Si $a, b \in E$ et si V est un ensemble de voisinages V_x^k correspondants à tous les points x de $\bar{E} = \bar{E}$, on peut choisir un nombre fini de termes dans $\mathcal{V}$,

$$V_{x_1}^k, V_{x_2}^k, \dots, V_{x_m}^k$$

recouvrant entièrement l'ensemble E et deux consécutifs $V_{x_i}^k, V_{x_{i+1}}^k$ ayant au moins $2k$ points communs.

5. Une fonction $f = f(x)$, uniforme et définie sur un ensemble linéaire quelconque E est dite *convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe* ou *concave* d'ordre n sur E si l'inégalité

$$(2) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] >, \geq, =, \leq \text{ ou } < 0$$

est satisfaite quels que soient $x_1, x_2, \dots, x_{n+2} \in E$.

Toutes ces fonctions sont des *fonctions d'ordre n* (¹).

¹⁾ Pour les notations et les propriétés de ces fonctions voir mes travaux antérieurs.

Toute fonction convexe, non-concave, ... etc. d'ordre n sur E est encore convexe, non-concave, ... etc. d'ordre n sur tout sous-ensemble de E .

Nous rappelons que la condition nécessaire et suffisante pour que f , définie sur un ensemble fini

$$(3) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_m, \quad m \geq n + 2$$

soit convexe, non-concave, ... etc. d'ordre n est que l'on ait

$$(4) \quad [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f] >, \geq, =, \leq \text{ ou } < 0 \\ i = 1, 2, \dots, m - n - 1$$

Cette propriété résulte du fait que toute différence divisée sur $n + 2$ points de (3) est une moyenne arithmétique des différences divisées spécifiées par l'inégalité (4), donc

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+2}}; f] = \sum_{i=1}^{m-n-1} A_i [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f]$$

$$A_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m - n - 1, \quad \sum_{i=1}^{m-n-1} A_i = 1$$

Si $i_1 < i_2 < \dots < i_{n+2}$ on a d'ailleurs sûrement $A_{i_1} > 0, A_{i_{n+2}-n-1} > 0$. Les A_i sont indépendants de la fonction f .

De cette propriété nous déduisons, en particulier, que:

Lemme IV. Si une fonction f est convexe, non-concave, ... etc. d'ordre n sur deux sections E_1, E_2 de E ayant au moins $n + 1$ points communs elle est convexe, non-concave, ... etc. d'ordre n sur la réunion des ensembles E_1, E_2 .

Ceci résulte immédiatement de ce qui précède et du fait que si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+2}$ sont $n + 2$ points de la réunion de E_1, E_2 et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$, $n + 1$ points communs à E_1 et E_2 , les points α_i, β_i rangés dans l'ordre croissant jouissent de la propriété que $n + 2$ points consécutifs quelconques appartiennent tous à E_1 ou à E_2 .

6. Introduisons maintenant la définition suivante:

Définition I. La fonction f est dite localement convexe, non-concave, ... etc. d'ordre n sur E si à tout $x \in E$ correspond un voisinage V_x^k où la fonction est convexe, non-concave, ... etc. d'ordre n .

Nous supposons toujours $n \geq 1$. Pour que la définition précédente ait un sens précis il faut que E ait au moins $n + 2$ points et que l'on ait $2k \geq n + 1$. La plus petite valeur de k qu'on peut ainsi admettre est

$$\text{donc } \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil, \text{ en désignant, comme d'habitude, par } [a] \text{ le plus grand}$$

entier compris dans a .

Nous avons maintenant la propriété suivante:

Théorème I. Toute fonction localement convexe, non-concave, ... etc.

d'ordre n sur E , avec $k = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil$, est convexe, non-concave, ... etc. d'ordre n sur E .

Il suffit de démontrer la propriété pour une section de E contenant ses extrémités. La propriété résulte alors des lemmes III et IV. Dans le cas d'un intervalle les voisinages peuvent être pris au sens ordinaire et la propriété a été donnée alors pour $n = 1$ par M. J. Blaquier¹⁾.

On peut facilement voir que la considération de la presque-fermeture $\bar{E}$ dans la définition I est essentielle. Si dans cette définition on remplace l'hypothèse $x \in E$ par l'hypothèse moins restrictive $x \in \bar{E}$, le théorème I peut ne pas être vrai pour un ensemble qui n'est pas presque-fermé. Par exemple la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

est bien localement polynomiale de tout ordre $n \geq 1$ avec la nouvelle définition (pour un k quelconque), mais n'est pas d'ordre n sur son ensemble de définition.

On pourrait encore chercher si on ne peut pas améliorer la propriété par une définition plus restrictive du voisinage. On peut facilement voir que si n est pair il suffit de considérer des voisinage ayant au moins

$n + 1$ points différents de x et ayant tous au moins $\frac{n+2}{2}$ points d'une

même côté de x et au moins $\frac{n}{2}$ points de l'autre côté de x .

7. On peut aussi imposer à un voisinage d'autres conditions entraînant la convexité. On peut dire, par exemple, que f a localement une droite d'appui si, quel que soit le point x_0 de E , différent d'une extrémité a, b , il existe un voisinage $V_{x_0}^1$ et une droite non-vérticale Δ passant par le point $(x_0, f(x_0))$ laissant la courbe $y = f(x)$ non au-dessous de Δ pour $x \in V_{x_0}^1$. On a alors le

Théorème II. Toute fonction f , définie et continue sur l'ensemble presque-fermé E et ayant localement une droite d'appui, est non-concave d'ordre 1 sur E .

La démonstration résulte des faits que toute fonction non-concave d'ordre 1 a localement une droite d'appui et que cette propriété n'est pas vraie pour une fonction qui n'est pas non-concave d'ordre 1. En

¹⁾ J. Blaquier, Sobre dos condiciones carateristicas de las funciones convexas, Atti Congresso Bologna, 2, 349—353 (1930).

effet, dans ce dernier cas, on peut trouver trois points $x_1 < x_2 < x_3$ de E tels que $[x_1, x_2, x_3; f] < 0$. L'ensemble des points où la fonction $f(x)$ —

$$-\frac{x-x_3}{x_1-x_3}f(x_1) - \frac{x-x_1}{x_3-x_1}f(x_3) \text{ atteint son maximum } (> 0) \text{ sur la par-}$$

tie de E comprise dans l'intervalle fermé (x_1, x_3) , est fermé. Les extrémités de cet ensemble sont des points de E , différents de a, b , où il n'existe pas de droite d'appui locale.

On démontre de la même manière le

Théorème III. *Toute fonction, f , définie et continue sur un ensemble presque-fermé E qui est telle que, quel que soit $x_0 \in E$, différent de a et b , il existe deux points x', x'' , $x' < x_0 < x''$ tels que si $V_{x_0}^1 \subset (x', x'')$ on peut trouver deux points x_1, x_2 de $V_{x_0}^1$, $x_1 < x_0 < x_2$ vérifiant l'inégalité $[x_0, x_1, x_2; f] \geq 0$, est non-concave d'ordre 1 sur E .*

On peut encore généraliser ces propriétés, mais il est inutile de le faire ici.

8. On pourrait aussi introduire la définition suivante:

Définition II. *La fonction f est localement d'ordre n sur E si à tout $x \in E$ correspond un voisinage V_x^k où la fonction est d'ordre n .*

Une fonction localement d'ordre n n'est pas en général d'ordre n sur E , aussi grand que soit k . Par exemple, la fonction

$$f(x) = (x-1)^{n+1}, 0 \leq x \leq 1; = 0, 1 \leq x \leq 2; = -(x-2)^{n+1}, 2 \leq x \leq 3$$

est localement d'ordre n (quel que soit k) et pourtant n'est pas d'ordre n dans l'intervalle fermé $(0,3)$.

Mais, nous avons le

Lemme V. *Si une fonction f est convexe ou concave d'ordre n sur deux sections E_1, E_2 de E ayant au moins $n+2$ points communs, elle est convexe ou concave d'ordre n sur la réunion des ensembles E_1, E_2 .*

Ce lemme est une conséquence du lemme IV puisque f ne peut être convexe sur l'une des sections et concave sur l'autre.

On en déduit immédiatement le

Théorème IV. *Si à tout $x \in E$ correspond un voisinage V_x^k , avec $k = \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil$*

où la fonction f est convexe ou concave d'ordre n , cette fonction est convexe ou concave d'ordre n sur E .

Ici encore on peut améliorer la propriété par une définition plus restrictive du voisinage si n est impair. Il suffit alors de considérer des voisinages ayant au moins $n+2$ points différents de x et ayant tous au moins

$$\frac{n+3}{2} \text{ points d'une même côté de } x \text{ et au moins } \frac{n+1}{2} \text{ points de l'autre}$$

côté de x .

9. Avant de finir faisons quelques remarques sur les différences divisées d'une fonction f . Posons.

$$\bar{\Delta}_n = \max_{(E)} [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f], \quad \underline{\Delta}_n = \min_{(E)} [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$$

$$\Delta_n = \max_{(E)} |[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]| = \max(|\bar{\Delta}_n|, |\underline{\Delta}_n|).$$

Les nombres finis ou infinis $\bar{\Delta}_n, \underline{\Delta}_n$ et Δ_n sont la n -ème borne supérieure, la n -ème borne inférieure et la n -ème borne de f sur E . Nous les désignerons aussi par $\bar{\Delta}_n[f; E], \underline{\Delta}_n[f; E]$ et $\Delta_n[f; E]$ ¹⁾.

Si nous prenons pour E l'ensemble fini (3) et nous posons

$$\Delta_k^i = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}; f],$$

nous avons

$$\bar{\Delta}_n = \max(\Delta_n^1, \Delta_n^2, \dots, \Delta_n^{m-n}), \quad \underline{\Delta}_n = \min(\Delta_n^1, \Delta_n^2, \dots, \Delta_n^{m-n})$$

$$\Delta_n = \max(|\Delta_n^1|, |\Delta_n^2|, \dots, |\Delta_n^{m-n}|).$$

Convenons encore de noter par $E_1 + E_2$ la réunion de deux ensembles E_1 et E_2 , nous avons alors le

Lemme VI. *Si E_1, E_2 sont deux sections de E ayant au moins n points communs, nous avons*

$$\bar{\Delta}_n[f; E_1 + E_2] = \max(\bar{\Delta}_n[f; E_1], \bar{\Delta}_n[f; E_2])$$

$$\underline{\Delta}_n[f; E_1 + E_2] = \min(\underline{\Delta}_n[f; E_1], \underline{\Delta}_n[f; E_2])$$

$$\Delta_n[f; E_1 + E_2] = \max(\Delta_n[f; E_1], \Delta_n[f; E_2]).$$

Démontrons la troisième égalité. Si $E^* \subset E$, on a évidemment

$$\Delta_n[f; E^*] \leq \Delta_n[f; E].$$

Nous avons donc

$$(5) \quad \Delta_n[f; E_1 + E_2] \geq \max(\Delta_n[f; E_1], \Delta_n[f; E_2]).$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}, n+1$ points de $E_1 + E_2$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ n points communs à E_1 et E_2 . Si nous rangeons les points β_i, α_i dans une suite (3), $n+1$ points consécutifs appartiennent toujours à E_1 ou à E_2 . On en déduit que

$$|[a_1, a_2, \dots, a_{n+1}; f]| \leq \max(\Delta_n[f; E_1], \Delta_n[f; E_2])$$

donc

$$(6) \quad \Delta_n[f; E_1 + E_2] \leq \max(\Delta_n[f; E_1], \Delta_n[f; E_2]).$$

¹⁾ Les nombres $\bar{\Delta}_n, \underline{\Delta}_n, \Delta_n$ pouvant être infinis, nous employons les conventions habituelles sur les opérations avec les signes $\pm \infty$. Voir, par ex., C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, pp. 14, 15.

Les deux inégalités (5), (6) démontrent la propriété. On démontre exactement de la même manière les deux premières égalités du lemme.

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème V. *Si f est une fonction définie sur E , (borné), on peut trouver trois points x_0, x_1, x_2 (distincts ou non) de la fermeture $\overline{E}$ de E de manière que, quels que soient les voisinages $V_{x_0}^k, V_{x_1}^k, V_{x_2}^k$, avec $k = \left[\frac{n+1}{2} \right]$, on ait*

$$\overline{\Delta}_n[f; V_{x_0}^k] = \overline{\Delta}_n[f; E]$$

$$\underline{\Delta}_n[f; V_{x_1}^k] = \underline{\Delta}_n[f; E]$$

$$\Delta_n[f; V_{x_2}^k] = \Delta_n[f; E]$$

Démontrons par exemple, la dernière égalité. Si l'égalité n'était pas vraie on pourrait attacher à chaque $x \in \overline{E}$ un voisinage V_x^k où $\Delta_n[f; V_x^k] < \Delta_n[f; E]$. Les lemmes III et VI nous montrent que ceci est impossible. On démontre les deux premières inégalités de la même manière. Il va sans dire que nous supposons toujours $n \geq 1$.

Nous avons déjà signalé cette propriété, pour Δ_n supposé fini, dans le cas où E est partout dense dans (a, b) ¹⁾ et aussi lorsque Δ_n est infini sous certaines restrictions ²⁾.

Dans le théorème V on peut modifier de diverses manières la définition du voisinage, mais nous ne nous occupons pas ici de cette question.

Cernăuți, le 8 juillet 1939.

¹⁾ Tiberiu Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*. Thèse, Paris 1933 ou *Mathematica*, **8**, 1—85 (1934), sp. p. 10.

²⁾ Tiberiu Popoviciu, *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (I). *Mathematica*, **12**, 81—92 (1936), sp. p. 89.