

NOTES SUR LES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR (VII)

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Note présentée par Mr S. Stoilov, Mc. A. R., dans la séance du 14 juillet 1939.

SUR L'ALLURE DES FONCTIONS D'ORDRE n

1. Une fonction $f = f(x)$, définie et uniforme sur un ensemble linéaire quelconque E est dite convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe, ou concave d'ordre n suivant que l'inégalité

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] >, \geq, =, \leq \text{ ou } < 0$$

est satisfaite quels que soient $x_1, x_2, \dots, x_{n+2} \in E$ ¹⁾.

Toutes ces fonctions sont des fonctions d'ordre n .

Nous dirons que l'ensemble E est décomposé en m sous-ensembles consécutifs

$$E_1, E_2, \dots, E_m$$

si $E_i \subset E$, $i = 1, 2, \dots, m$, si tout point de E_i appartient à un E et si tout point de E_i est à gauche de tout point de E_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, m-1$.

Dans notre Thèse²⁾ nous avons démontré la propriété suivante:

Théorème I. Si f est d'ordre n sur E , on peut décomposer cet ensemble en au plus $k+1$ sous-ensembles consécutifs sur chacun la fonction étant d'ordre $n-k$.

La propriété est vraie pour $k = 1, 2, \dots, n+1$.

Cette propriété résulte du

Théorème II. Si f est d'ordre n et si

$$(1) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_m, \quad m > n+2$$

est un sous-ensemble fini quelconque de E , la suite

$$(2) \quad \Delta_{n-k+1}^1, \Delta_{n-k+1}^2, \dots, \Delta_{n-k+1}^{m-n+k-1}$$

¹⁾ Pour les notations et les propriétés des fonctions d'ordre n voir nos travaux antérieurs.

²⁾ Tiberiu Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Thèse, Paris 1933 ou *Mathematica* 8, 1-85 (1934).

présente au plus k variations de signes. Ici nous avons posé

$$(3) \Delta_k^i = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}; f], i = 1, 2, \dots, m-k, k = 0, 1, \dots, m-1$$

Dans cette note nous nous proposons de donner une réciproque du théorème II.

2. Avant d'aller plus loin faisons quelques remarques sur les fonctions d'ordre n . Usant de la notation (3), toute différence divisée d'ordre $n+1$ de f sur $n+2$ points, choisis parmi les points (1), est une moyenne arithmétique des différences divisées $\Delta_{n+1}^1, \Delta_{n+1}^2, \dots, \Delta_{n+1}^{m-n-1}$, donc

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+2}}; f] = \sum_{i=1}^{m-n-1} A_i \Delta_{n+1}^i$$

$$A_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m-n-1, \sum_{i=1}^{m-n-1} A_i = 1,$$

les A_i étant indépendants de la fonction f . On a d'ailleurs sûrement

$$A_i > 0, A_{i_{n+2}-n-1} > 0 \text{ si } i_1 < i_2 < \dots < i_{n+2}.$$

On en déduit immédiatement le

Lemme I. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f , définie sur l'ensemble fini (1), soit convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe ou concave d'ordre n est que l'on ait

$$\Delta_{n+1}^i >, \geq, =, \leq \text{ ou } < 0, i = 1, 2, \dots, m-n-1$$

De ce lemme résulte immédiatement le théorème II.

Démontrons encore le

Lemme II. Pour que la fonction f soit d'ordre n sur E ayant au moins $n+3$ points il faut et il suffit que l'on ait

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] [x_2, x_3, \dots, x_{n+3}; f] \geq 0,$$

quels que soient les points $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+3}$ de E .

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est aussi suffisante. Il suffit en effet de montrer que la propriété n'est pas vraie pour une fonction qui n'est pas d'ordre n , il suffit donc de démontrer le

Lemme III. Si la fonction f n'est pas d'ordre n sur E on peut trouver $n+3$ points $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+3}$ de E tels que l'on ait

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] [x_2, x_3, \dots, x_{n+3}; f] < 0.$$

Le fait que f n'est pas d'ordre n signifie qu'on peut trouver $n+2$ points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+2}$ de E tels que $[a_1, a_2, \dots, a_{n+2}; f] > 0$ et $n+2$ points $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+2}$ de E tels que $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+2}; f] < 0$. Rangeons tous les points distincts σ_i, β_i dans une suite croissante (1). On a alors $n+3 \leq m \leq 2n+2$. La suite des différences divisées

$$(4) \Delta_{n+1}^1, \Delta_{n+1}^2, \dots, \Delta_{n+1}^{m-n-1}$$

présente au moins une variation de signe, donc contient au moins deux termes non nuls et de signes contraires. Soit Δ_{n+1}^p le premier terme non nul dans (4) et Δ_{n+1}^s le premier terme non nul et de signe contraire avec Δ_{n+1}^p . Enfin soit Δ_{n+1}^r le dernier terme non nul dans la suite $\Delta_{n+1}^1, \Delta_{n+1}^2, \dots, \Delta_{n+1}^{s-1}$. On a alors $\Delta_{n+1}^r, \Delta_{n+1}^s < 0$ et $r < s$. Si $s = r+1$ l'inégalité $\Delta_{n+1}^r \Delta_{n+1}^{r+1} < 0$ démontre le lemme III. Si $s > r+1$ on a $\Delta_{n+1}^{r+1} = \Delta_{n+1}^{r+2} = \dots = \Delta_{n+1}^{s-1} = 0$ et l'inégalité

$$[x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+n}, x_{s+n}; f] [x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{r+n}, x_{s+n}, x_{s+n+1}; f] < 0$$

démontre le lemme III.

3. Établissons maintenant la réciproque du théorème II. Pour cela remarquons que $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; P] = 0$ identiquement si P est un polynôme de degré n . De là résulte cette propriété importante que toute fonction $f - P$, où P est un polynôme de degré n , jouit de la même propriété que f par rapport à tout caractère de convexité d'ordre $\geq n$. Nous avons alors le

Théorème III. Si, quels que soient le polynôme P de degré n et le sous-ensemble fini (1) de E , la suite (2) correspondante à (1) et à la fonction $f - P$ présente au plus k variations de signes, la fonction f est d'ordre n sur E .

Il suffit de démontrer que si la fonction n'est pas d'ordre n , on peut trouver une suite (1) de E et un polynôme P tels que la suite (2) présente plus de k variations. Prenons pour cela, comme suite (1), $n+3$ points $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+3}$ de E tels que $\Delta_{n+1}^1, \Delta_{n+1}^2 < 0$, ce qui est possible d'après le lemme III. Déterminons d'abord le polynôme $P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{k-1} x^{n-k+1}$ de manière que pour la fonction $f_1 = f - P$ on ait

$$(5) \Delta_{n-k+1}^i = 0, i = 2, 3, \dots, k+1.$$

La suite (2) correspondante devient, à des facteurs positifs près,

$$(6) (-1)^k \Delta_{n+1}^1, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^k, \Delta_{n+1}^2.$$

Mais (5), regardé comme un système de k équations linéaires dans les k inconnues $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$, a son déterminant différent de zéro¹⁾. On peut donc modifier ces coefficients de manière que la suite (6) ait tous ses termes non nuls et de signes alternés, donc qu'elle présente $k+1$ variations de signes. Le théorème III est donc démontré. On voit que dans l'énoncé on peut ne considérer que les sous-ensembles finis de E ayant $n+3$ points.

¹⁾ de degré effectif $\leq n$.

²⁾ Ce déterminant est en effet égal, au signe près, à

$$\prod_{i=2}^k \left[\prod_{j=0}^{k-i} (x_{n+2-j} - x_i) \right] (= 1 \text{ pour } k=1).$$

4. Nous avons dit que le théorème I résulte du théorème II. Le théorème I a également une réciproque que nous étudierons dans un autre travail. Faisons ici seulement une remarque sur le cas $n = 1$. Nous avons démontré dans une note précédente ¹⁾ que l'inégalité

$$(7) \quad f(x_2) \leq \max[f(x_1), f(x_3)], \quad x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in E$$

est nécessaire et suffisante pour qu'on puisse décomposer l'ensemble E en au plus deux sous-ensembles consécutifs tels que sur chacun la fonction f ou $-f$ soit monotone, la monotonie étant de sens opposés sur les deux sous-ensembles. En particulier, les fonctions d'ordre 1 vérifiant cette propriété donc sont telle que f ou $-f$ vérifie l'inégalité (7). Nous avons ici encore une réciproque et ainsi on peut énoncer le

Théorème IV. *Pour que la fonction f soit d'ordre 1 sur E , il faut et il suffit que, quel que soit le nombre a , on puisse décomposer l'ensemble E en au plus deux sous-ensembles consécutifs sur chacun la fonction $f - ax$ étant monotone, la monotonie étant de sens opposés sur les deux sous-ensembles.*

La condition est nécessaire puisque $f - ax$ est d'ordre 1 si f est d'ordre 1. Montrons qu'elle est aussi suffisante. Il suffit pour cela de montrer que si f n'est pas d'ordre 1 on peut trouver un nombre a de manière que f_1 et $-f_1$, avec $f_1 = f - ax$, ne vérifient pas la propriété exprimée par l'inégalité (7). Si f n'est pas d'ordre 1 on peut trouver 4 points $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ de E de manière que

$$[x_1, x_2, x_3; f] [x_2, x_3, x_4; f] < 0.$$

Déterminons le nombre a de manière que

$$[x_2, x_3; f] > a > \max([x_1, x_2; f], [x_3, x_4; f]) \text{ si } [x_1, x_2, x_3; f] > 0$$

$$[x_2, x_3; f] < a < \min([x_1, x_2; f], [x_3, x_4; f]) \text{ si } [x_1, x_2, x_3; f] < 0.$$

En posant alors $f_1 = f - ax$, on a

$$f_1(x_2) > f_1(x_1), \quad f_1(x_3) < f_1(x_2), \quad f_1(x_4) > f_1(x_3)$$

dans le premier cas et

$$f_1(x_2) < f_1(x_1), \quad f_1(x_3) > f_1(x_2), \quad f_1(x_4) < f_1(x_3)$$

dans le deuxième cas. On vérifie immédiatement que f_1 et $-f_1$ ne vérifient pas l'inégalité (7).

On peut choisir les nombres a, β de manière que si $f_1 = f + ax + \beta$ on ait $f_1(x_2) = A$, $f_1(x_3) = B$, A, B étant deux nombres quelconques. En prenant A négatif, B positif suffisamment petits si $[x_1, x_2, x_3; f] > 0$ et A positif, B négatif suffisamment petits si $[x_1, x_2, x_3; f] < 0$, on a

$$f_1(x_1) > 0, \quad f_1(x_2) < 0, \quad f_1(x_3) > 0, \quad f_1(x_4) < 0$$

¹⁾ Tiberiu Popoviciu, Deux remarques sur les fonctions convexes, Bulletin Scient. Acad. Roumaine, 20, 45—49 (1938).

dans le premier cas et

$$f_1(x_1) < 0, \quad f_1(x_2) > 0, \quad f_1(x_3) < 0, \quad f_1(x_4) > 0$$

dans le deuxième cas. On en déduit le

Théorème V. *Pour que la fonction f soit d'ordre 1 sur E , il faut et il suffit que, quels que soient les nombres a, β , on puisse décomposer l'ensemble E en au plus trois sous-ensembles consécutifs sur chacun la fonction $f + ax + \beta$ étant de signe invariable.*

On peut maintenant entrevoir la réciproque du théorème I dans le cas général mais, comme nous l'avons dit, nous reviendrons sur cette question dans un autre mémoire.

Cernăuți, le 5 juillet 1939.