Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (VI)[1]

Par TIBERIU POPOVICIU

à Cernăuti

Sur les extréma des fonctions d'ordre n.

1. Nous allons considérer des fonctions $f=f(x)$, uniformes et définies sur un ensemble linéaire borné et fermé E. Cet ensemble peut être fini ou infini, mais lorsqu'il s'agit d'une fonction d'ordre n il a au moins $n+2$ points. Nous désignerons par $a=\min E$, $a<b=\max E$ les extrémités de E. Nous dirons qu'une fonction est continue resp. semi-continue sur E s'il en est ainsi sur le dérivé E' de E. Nous dirons qu'un sous-ensemble de E est *une section* de E s'il est formé par tous les points de E appartenant à un intervalle fermé (c, d), $c \leq d$. Nous désignerons un tel sous-ensemble par (cEd). Nous dirons que les sections (cEd), $(c_1 E a_1)$ sont *séparées par* E si $d<c_1$ et si l'intervalle ouvert (d, c_1) contient au moins un point de E. Plusieurs sections de E sont séparées par E si elles sont deux à deux séparées par E. On dira aussi que ce sont des sections séparées de E. Pour toutes les autres notations et les propriétés des fonctions d'ordre n le lecteur est prié de se rapporter à nos travaux antérieurs.

Une fonction non-concave d'ordre impair sur E est semi-continue supérieurement et atteint donc toujours son maximum. Mais une telle fonction peut ne pas atteindre son minimum. Une fonction d'ordre pair >0 peut n'atteindre ni son maximum ni son minimum. Telle est, par exemple, la fonction

$$f(0)=f(1)=0, \quad f(x)=1-2x, \quad 0<x<1.$$

Si le maximum ou le minimum d'une fonction d'ordre n est atteint en $n+2$ points il est atteint en tous les points de la plus petite section qui contient ces points.

2. Pour simplifier posons $k=\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ suivant que n est pair ou impair. Nous avons alors la propriété suivante

Si la fonction continue f *est non-concave d'ordre* n *sur* E, *l'ensemble* $E(M)$ *où* $M=\max f$ *est atteint est formé par au plus* $k+1$ *sections séparées de* E.

Pour simplifier nous écrivons max, min au lieu de $\underset{(E)}{\max}$, $\underset{(E)}{\min}$.

La démonstration est simple. En effet, si $E(M)$ avait une autre structure on pourrait trouver $2k+2$ points $x_1<x'_1<\ldots<x_{k+1}<x'_{k+1}$ de E de manière que

$$f(x_1)=f(x_2)=\ldots=f(x_{k+1})=M,$$
$$f(x'_i)<M, \quad i=1,2,\ldots,k+1$$

et on aurait alors

$$[x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_{k+1}, x'_{k+1}; f]<0 \quad \text{si } n \text{ est pair},$$
$$[x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_{k+1}, x'_{k+1}; f]<0 \quad \text{si } n \text{ est impair},$$

(1) Les notes I et II ont parues dans Mathematica, 12, 81—92, 227—233 (1936). Les notes III, IV et V paraitrons dans cette même revue. Toutes ces notes sont d'ailleurs indépendantes l'une de l'autre.

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de la non-concavité d'ordre n de f.

On peut préciser la structure de l'ensemble $E(M)$.

Si n est impair et si $E(M)$ contient au moins n points il contient l'une au moins des extrémités a, b. Si $E(M)$ contient au moins $n+1$ points ils contient les deux extrémités a, b. Donc pour une fonction non-concave d'ordre impair $E(M)$ ne peut contenir plus de $n+1$ points sans que la fonction ne se réduise pas à une constante sur E.

Si n est pair et $E(M)$ contient plus de n points il contient l'extrémité b.

En général, si $E(M)$ n'est pas formé par une seule section de E il contient au plus $n+1$ points.

Si n est impair et si $E(M)$ est formé par k sections séparées de E il contient a ou b et s'il est formé par $k+1$ sections séparées de E il contient a et b.

Si n est pair et si $E(M)$ est formé par $k+1$ sections séparées de E il contient l'extrémité b.

Retenons, en particulier, la propriété suivante:

Si la fonction continue f ***est non-concave d'ordre*** n ***sur*** E, ***l'ensemble*** $E(M)$ ***vérifie la propriété suivante :***

A. $E(M)$ ***ne peut être formé par au moins*** $n-k+1$ ***sections séparées de*** E ***sans contenir l'une des extrémités*** a, b ***pour*** n ***impair et l'extrémité*** b ***pour*** n ***pair.***

Si E se réduit à un intervalle (a, b) et si n est impair, $E(M)$ contient au plus $k+1$ points à moins que f ne soit pas une constante dans (a, b). Si n est pair $E(M)$ contient ou bien au plus $k+1$ points ou bien est formé par un intervalle (c, b), $a \leq c$.

Il est inutile de préciser ici davantage la structure de $E(M)$.

3. On peut trouver des résultats analogues pour le minimum.

Si la fonction continue f ***est non-concave d'ordre*** n ***sur*** E, ***l'ensemble*** $E(m)$ ***où*** $m = \min f$ ***est atteint est formé par au plus*** $n-k+1$ ***sections séparées de*** E.

La structure de $E(m)$ peut être précisée facilement. Par exemple, dès que $E(m)$ ne se réduit pas à une section il contient au plus $n+1$ points. Pour les fonctions d'ordre pair la structure de $E(m)$ se déduit d'ailleurs de la structure de $E(M)$, en remarquant que la fonction $-f(-x)$ est aussi non-concave d'ordre n.

En particulier donc

B. ***Si*** n ***est pair, l'ensemble*** $E(m)$ ***ne peut être formé par au moins*** $k+1$ ***sections séparées de*** E ***sans contenir l'extrémité*** a.

Pour les fonctions non-concaves d'ordre impair retenons la propriété suivante

C. ***Si*** n ***est impair, l'ensemble*** $E(m)$ ***est formé par au plus*** k ***sections séparées de*** E.

Si E se réduit à un intervalle (a, b), $E(m)$ contient ou bien au plus $n-k+1$ points ou bien se réduit à un intervalle qui contient l'extrémité a pour n pair.

4. Si la fonction f est non-concave d'ordre n il en est de même de la fonction $f-P$, P étant un polynome de degré n [1]. Si f n'est pas polynomiale d'ordre n on peut toujours déterminer le polynome P de manière que les ensemble $E(M)$, $E(m)$ correspondants à $f-P$ soient formés par le nombre maximum de sections

(1) Un polynome de degré n pour nous est un polynome de degré effectif $\leq n$.

séparées de E, donc que $E(M)+E(m)$ soit formé par $n+2$ sections séparées de E. Soit, en effet, T_i le polynome de meilleure approximation de **Tchebycheff** de degré i de la fonction f sur E. T_i est donc le polynome (unique) pour lequel

$$\min \max | f-P |,$$

est atteint lorque P est un polynome de degré i. Nous avons alors la propriété suivante (1)

Si T_n *est le polynome de* **Tchebycheff** *de degré* n *de la fonction f continue et non-concave d'ordre* n, *ne se réduisant pas à un polynome de degré* n, *on peut trouver* $n+2$ *et seulement* $n+2$ *points consécutifs où la différence* $f-T_n$ *atteint la valeur* $\max | f-T_n |$ *avec des signes alternés.*

Cette propriété est équivalente à la suivante

Si f *est une fonction continue et d'ordre* n, *ne se réduisant pas à un polynome de degré* n, *les polynomes* T_n, T_{n+1} *sont distincts, donc* T_{n+1} *est effectivement de degré* $n+1$.

Si f est non-concave d'ordre n, la fonction $f-T_n$ jouit donc de la propriété que $E(M)$ est formé par $k+1$ et $E(m)$ par $n-k+1$ sections séparées de E, à moins, bien entendu, que f ne soit pas polynomiale.

Remarquons aussi la propriété suivante

Si T_n *est le polynome de* **Tchebycheff** *de degré* n *de la fonction* f *continue et d'ordre* n, *la valeur* $\max | f-T_n |$ *est nécessairement atteint aux extrémités* a *et* b. *On a d'ailleurs* $[f(a)-T_n(a)]\ [f(b)-T_n(b)] \geqq$ *ou* $\leqq 0$ *suivant que* n *est impair ou pair.*

5. Nous allons maintenant établir, et c'est le but principal de ce travail, les réciproques des propriétés précédentes et d'abord celles des propriétés A, B, C. Avant d'arriver à ces propriétés nous allons traiter un problème auxiliaire.

Soient $x_1 > x_2 > \ldots > x_r$, r points de E tels que chaque intervalle ouvert (x_i, x_{i+1}), $i=1,2,\ldots,r-1$ contient au moins un point de E. Les points x_r, x_1 peuvent ou non coïncider avec les extrémités a, b. Posons

$$F_i = (x_{i+1}\, E x_i), \qquad i=1,2,\ldots,r-1$$

et

$$F_0 = (x_1\, E b) \qquad \text{si } x_1 < b,$$
$$F_r = (a E x_r) \qquad \text{si } a < x_r.$$

Nous avons donc, suivant les cas, $r-1$, r ou $r+1$ ensembles F_i. Nous allons d'ailleurs supposer que si $r=1$, $a<x_1<b$ et si $r=2$ nous n'avons pas en même temps $a=x_2$, $x_1=b$. Ainsi le nombre $s+2$ des ensembles F_i est toujours $\geqq 2$, donc $s \geqq 0$.

Considérons maintenant une fonction continue f qui s'annule aux points x_i et telle que chaque F_i contient au moins un point x_i où elle prend une valeur positive

Posons

$$R=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r)$$

(1) Nous avons déjà donné cette propriété dans notre petit livre *«Despre cea mai bună aproximatie a functiilor continue prin polinoame»*, Monografii Matematice, Cluj 66 pp., 1937, sp. p. 22. La démonstration donnée dans ce livre pour E = intervalle est évidemment valable pour E borné et fermé quelconque.

et soit

$$\mu = \min_{(\varepsilon)} \max (f - RQ),$$

lorsque Q parcourt l'ensemble des polynomes de degré s.

Nous avons $\mu > 0$.

On a évidemment $\mu \geqq 0$. Soit

$$\delta = [x_1, x_2, \ldots, x_r, x'_0, x'_1, \ldots, x'_r ; f],$$

avec la condition de supprimer le point x'_0 si $x_1 = b$ et le point x'_r si $x_r = a$. δ est donc une différence divisée d'ordre $r + s + 1$. D'autre part

(1) $$[x_1, x_2, \ldots, x_r, x'_0, x'_1, \ldots x'_r ; \; f - RQ] = \delta,$$

quel que soit le polynome Q de degré s.

Si l'on avait $\mu = 0$ on pourrait trouver, quel que soit $\frac{|\delta|}{2} > \varepsilon > 0$, un polynome Q tel que

$$[x_1, x_2, \ldots, x_r, x'_0, x'_1, \ldots, x'_r ; \; f - RQ] > -\varepsilon > \frac{\delta}{2} \text{ ou } < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$$

suivant que $x_1 = b$ ou $x_1 < b$, ce qui est en contradiction avec (1).

6. Démontrons maintenant le

Lemme I. *Si le polynome* $Q = c_0 x^s + c_1 x^{s-1} + \ldots + c_s$, *ou* $-Q$ *vérifie l'inégalité*

(2) $$R(x)\, Q(x) < A, \quad x \subset E, \quad (A > 0),$$

on peut trouver un nombre positif B, *dépendant de* A *mais non du polynome* Q, *tel que l'on ait*

$$|c_i| < B, \; i = 0, 1, \ldots, s$$

Ce lemme résulte du suivant

Lemme II. *Si le polynome* $Q = c_0 x^s + c_1 x^{s-1} + \ldots + c_s$, *ou* $-Q$ *vérifie l'inégalité*

(3) $$(-1)^i Q(y_i) < A^*, \quad i = 1, 2, \ldots, s+2, \quad (A^* > 0),$$

on peut trouver un nombre positif B^*, *dépendant de* A^* *mais non du polynome* Q, *tel que l'on ait*

$$|c_i| < B^*, \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Démontrons d'abord la propriété pour le premier coefficient c_0. Si nous posons $W = (x - y_1)(x - y_2) \ldots (x - y_{s+2})$, la formule d'interpolation de **Lagrange** nous donne

$$c_0 = \sum_{i=1}^{s+1} \frac{(y_i - y_{s+2})\, Q(y_i)}{W'(y_i)} = \sum_{i=2}^{s+2} \frac{(y_i - y_1)\, Q(y_i)}{W'(y_i)}.$$

Mais

$$(-1)^i W'(y_i) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s+2$$

et nous en déduisons

$$-A^* \cdot \sum_{i=2}^{s+2} \frac{y_1 - y_i}{(-1)^i W'(y_i)} < c_0 < A^* \cdot \sum_{i=1}^{s+1} \frac{y_i - y_{s+2}}{(-1)^i W'(y_i)}. \text{ [1]}$$

Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour les coefficients c_0, $c_1, \ldots, c_{j-1}$ et démontrons-la pour le coefficient c_j. Nous avons

$$|c_i| < B^*_1, \quad i = 0, 1, \ldots, j-1,$$

(1) On en déduit une limitation analogue si $-Q$ vérifie l'inégalité (3).

B^*_1 étant une constante dépendant de A^* mais non de Q. Si nous posons $Q_1 = c_j x^{s-j} + c_{j+1} x^{s-j-1} + \ldots + c_s$, nous avons

$$(-1)^i Q_1(y_i) = (-1)^i Q(y_i) - (-1)^i (c_0 x^s + c_1 x^{s-1} + \ldots + c_{j-1} x^{s-j+1}),$$

donc

$$(-1)^i Q(y_i) < A^*_1 = A^* + B^*_1 \cdot \max_{t=1,2,\ldots,s+2} (|y_t|^s + |y_t|^{s-1} + \ldots + |y_t|^{s-j+1})$$

$$i = 1, 2, \ldots, s+2-j$$

et A^*_1 dépend de A^* seulement. La limitation de c_j revient ainsi à la limitation d'un premier coefficient.

Le lemme II est donc démontré. Remarquons qu'on peut prendre pour B^* un nombre de la forme $K.A^*$, K étant indépendant de A^* et du polynome Q.

Le lemme I en résulte facilement. Il suffit de prendre pour y_i les points x_i et de remarquer que de (2) résulte une inégalité de la forme (3) pour Q ou $-Q$, avec la valeur

$$A^* = \frac{A}{\min\limits_{(i)} |R(x'_i)|}.$$

Nous dirons, pour simplifier le langage, qu'un polynome Q de degré s pour lequel le minimum est atteint, est ***un polynome de meilleure majoration*** de f sur l'ensemble E. Du lemme I, nous déduisons, par un raisonnement classique, que

Il existe au moins un polynome de meilleure majoration.

La démostration consiste en à remarquer d'abord que $\max (f - RQ)$ est une fonction continue des coefficients de Q. On voit ensuite qu'il suffit de considérer les polynomes Q pour lesquels

$$f(x) - R(x) Q(x) \leq \max f, \quad x \subset E,$$

donc les polynomes Q pour lesquels

$$-R(x) Q(x) \leq \max f - \min f, \quad x \subset E.$$

7. Nous allons démontrer maintenant que

Si Q est un polynome de meilleure majoration, la fonction $f - RQ$ atteint la valeur μ sur chacun des ensembles F_i.

Supposons le contraire et soient.

(4) $$F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_t}, \; i_1 < i_2 < \ldots < i_t, \; t \leq s+1$$

ceux des ensembles F_i sur lesquels la valeur μ est atteint. On a donc

$$\max_{(F_{i_j})} (f - RQ) = \mu, \quad j = 1, 2, \ldots, t,$$

$$\max_{(F_i)} (f - RQ) < \mu \quad i \neq i_j, \; j = 1, 2, \ldots, t.$$

On peut alors trouver un $\mu_1 < \mu$ tel que

$$f - RQ \leq \mu_1, \; x \subset F_i, \; i \neq i_j, \quad j = 1, 2, \ldots, t.$$

Construisons le polynome $U = \prod (x - x_j)$ où j prend seulement les valeurs $i_j + 1$ pour lesquelles $i_{j+1} - i_j$ est impair, $1 \leq j \leq t-1$. Si $t = 1$, $U = 1$. Il en est encore ainsi si toutes les différences $i_{j+1} - i_j$ sont paires.

On voit que U est de degré s et que RU ***est de même signe en tout point des ensembles*** (4). Soit λ une constante de ce même signe; λRU est donc positif sur les ensembles (4) sauf sur leurs extrémités où ce polynome s'annule.

Ceci étant, on voit facilement qu'on peut prendre $|\lambda|$ suffisamment petit pour que l'on ait

$$f - R(Q + \lambda U) < \mu, \ x \subset F_{i_j}, \ j = 1, 2, \ldots, t,$$

$$f - R(Q + \lambda U) \leqq \frac{\mu + \mu_1}{2} < \mu, \ x \subset F_i, \ i \neq i_j, \ j = 1, 2, \ldots, t$$

et Q ne serait pas un polynome de meilleure majoration. La propriété est donc démontrée.

On peut encore remarquer que

***Si** Q **est un polynome de meilleure majoration, l'ensemble sur lequel** $f - RQ$ **atteint la valeur** μ **ne peut contenir aucun des points** x_i **et ne peut être formé par moins de** $s + 2$ **sections séparées de** E.*

Dans la suite l'existence d'un polynome de meilleure majoration sera suffisante mais nous pouvons démontrer la propriété suivante

Il existe un seul polynome de meilleure majoration.

Supposons le contraire et soient Q, Q_1 deux polynomes distincts de meilleure majoration. Si $Q_2 = \dfrac{Q + Q_1}{2}$, nous avons

$$(5) \qquad f - RQ_2 = \frac{1}{2}[(f - RQ) + (f - RQ_1)] \leqq \mu, \quad x \subset E$$

$$\max(f - RQ_2) \geqq \mu,$$

donc Q_2 est encore un polynome de meilleure majoration. On en déduit immédiatement qu'il existe au moins $s + 2$ points, différents des points x_i, où $f - RQ = \mu$ et, d'après (5), au moins $s + 2$ de tels points où

$$f - RQ = f - RQ_1, \text{ ou } Q = Q_1,$$

donc $Q \equiv Q_1$. L'unicité résulte d'ailleurs du seul fait que la valeur μ est atteint en au moins $s + 1$ points.

8. Revenons maintenant aux fonctions d'ordre n. Démontrons que

Théorème I. *Si* f *est une fonction continue définie sur* E *et si, quels que soient le polynome* P *de degré* n *et la section* E_1 *de* E, *l'ensemble* $E_1(M)$ *correspondant à* $f - P$ *vérifie la propriété* A, *la fonction* f *est non-concave d'ordre* n *sur* E [1].

Il suffit de démontrer que si f n'est pas non-concave d'ordre n on peut trouver un E_1 et un polynome P tels que $E_1(M)$ ne vérifie pas la propriété A.

Si f n'est pas non-concave d'ordre n on peut trouver $n + 2$ points $x_1 > x_2 > \ldots > x_{n+2}$ tels que l'on ait

$$(6) \qquad [x_1, x_2, \ldots ; x_{n+2} ; f] < 0.$$

On peut alors trouver un polynome S de degré n tel que la fonction $f_1 = f - S$ vérifie les égalités

$$f_1(x_1) = f_1(x_3) = \ldots = f_1(x_{2k+1}) = 0.$$

$$f_1(x_2) = f_1(x_4) = \ldots = f_1(x_{2n-2k+2}) = 2\rho > 0.$$

Il suffit de prendre $S = G - \rho$, où G est le polynome de meilleure approximation de degré n de f sur les points x_i et $\rho > 0$ cette meilleure approximation.

Soit alors Q le polynome de meilleure majoration de f_1 sur l'ensemble

(1) Si, plus restrictivement, on suppose que E_1 est un sous-ensemble quelconque de E la propriété est banale.

$E_2 = (x_{n+2} E x_1)$, en prenant comme points x_i les points $x_1, x_3, \ldots, x_{2k+1}$. On voit immédiatement que pour $P = G - \rho + RQ$ la propriété A n'est pas vérifiée pour $f - P$ sur E_1.

Nous en déduisons immédiatement le

Théorème II. *Si* f *est une fonction continue définie sur* E *et si, quels que soient le polynome* P *de degré pair* n *et la section* E_1 *de* E, *l'ensemble* E_1 (m) *correspondant à* f — P *vérifie la propriété* B, *la fonction* f *est non concave d'ordre pair* n *sur* E.

Pour les fonctions non-concaves d'ordre impair nous avons la propriété suivante

Théorème III. *Si* f *est une fonction continue définie sur* E *et si, quel que soit le polynome* P *de degré impair* n, *l'ensemble* E (m) *correspondant à* f — P *vérifie la propriété* C, *la fonction est non-concave d'ordre impair* n *sur* E.

La démonstration se fait comme pour le théorème I. Si f n'est pas non concave d'ordre n on peut trouver n + 2 points $x_1 > x_2 > \ldots, > x_{n+2}$ tels que l'on ait l'inégalité (1). On peut alors trouver, comme plus haut, un polynome S de degré n tels que si $f_1 = f - S$ on ait

$$f_1(x_2) = f_1(x_4) = \ldots = f_1(x_{2k}) = 0$$
$$f_1(x_1) = f_1(x_3) = \ldots = f_1(x_{n+2}) < 0.$$

Soit alors Q le polynome de meilleure majoration de $-f_1$ sur l'ensemble E, en prenant comme points x_i les points $x_2, x_4, \ldots, x_{2k}$. On voit immédiatement que pour $P = S - RQ$ la propriété C n'est pas vérifiée par f — P sur E.

9. Faisons quelques remarques sur les théorèmes précédents. On peut toujours ne considérer que les polynomes P qui s'annulent tous en un même point, par exemple on peut ne considérer que les polynomes divisibles par x [P( ) = 0].

Dans la démonstration des théorèmes I, II l'hypothèse n > 1 intervient implicitement. Mais ces théorèmes restent vrais pour n = 0, 1. Pour n = 0 nous avons la propriété suivante, à peu près évidente

Si f *est définie sur* E *et si, quel que soit la section* $E_1 = (cEd)$ *de* E, c, d < E, *on a* $f(d) = \max_{(E_1)} f$, *la fonction* f *est non-décroissante sur* E.

Pour n = 1 nous avons le théorème suivant, du à M. **S. Saks** [1].

Si f *est une fonction définie sur* E *et si, quels que soient la section* E_1 *de* E *et la constante* α, *la fonction* f + αx *atteint son maximum en l'une au moins des extrémités de* E_1 *la fonction* f *est non-concave d'ordre* 1 *sur* E.

Nous avons déjà donné le théorème III pour n = 1 dans un travail précédent [2].

L'hypothèse de la continuité de f ne peut être supprimée en général, mais elle peut être remplacée par des hypothèses moins restrictives. Par exemple, par la semi-continuité supérieure pour le maximum et inférieure pour le minimum. Comme nous le montre l'exemple des fonctions d'ordre 0 ou 1 on peut se passer complètement de telles hypothèses sous certaines conditions. On peut aussi imposer à f — P des conditions moins restrictives et caractériser ainsi les fonctions d'ordre n. Ainsi, par exemple, nous avons la propriété, à peu près évidente.

---

(1) **S. Saks** *«O funkjach wypuklych i podharmonicznych»* Mathesis Polska, 6, 43—65 (1931).

(2) **Tiberiu Popoviciu** *«Deux remarques sur les fonctions convexes»* Bulletin de l'Acad. Roumaine, 20, 45 – 49 (1939).

Si f *est définie sur* E *et si, quel que soit la section* $E_1 = (cEd)$ *de* E, *on a* $f(c) = \min\limits_{(\,_1)} f$ *ou* $f(d) = \max\limits_{(E_1)} f$, *la fonction* f *est non-décroissante sur* E.

10. Les propriétés des ensembles $E(M)$, $E(m)$ précisent beaucoup les polynomes T_n, T_{n+1} de meilleure approximation d'une fonction continue d'ordre n.

Nous allons supposer maintenant que E soit un intervalle fermé (a, b) et la fonction f continue dans (a, b).

Posons [1]

$$\tau = \tau(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,;\, f) = \frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,;\, f)}{\sum\limits_{i=1}^{n+2} |V(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2})|}$$

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_{n+2}.$$

Nous supposons que le lecteur connaisse les propriétés des polynomes de meilleure approximation établies par MM. **E. Borel** [2] et **Ch. de la Vallée Poussin** [3]. En particulier, rappelons que la meilleure approximation d'ordre n de la fonction f dans un intervalle est égale au maximum de $|\tau|$ lorsque les x_i restent dans cet intervalle. Si $x_1, > x_2, > \ldots > x_{n+2}$ sont des points pour lesquels ce maximum est atteint, $f - T_n$ prend alternativement les valeurs $\pm |\tau|$ sur ces points. Le polynome T_n est caractérisé complètement par le fait que $f - T_n$ atteint la valeur $\max |f - T_n|$ en au moins $n + 2$ points consécutifs avec des signes alternés.

M. **Ch. de la Vallée Poussin** remarque que $|\tau|$ est une fonction continue des x_i. Mais si nous tenons compte du fait qu'il y a correspondance continue entre les fonctions continues et leurs polynomes T_n on voit facilement que

τ *est une fonction continue lorsque les* x_i *restent dans un intervalle.*

On peut aussi démontrer directement cette propriété.

Il est d'ailleurs à remarquer que le maximum ou le minimum, supposé non nul, de τ ne peut être atteint que pour des valeurs distinctes des x_i.

11. Démontrons maintenant le lemme suivant :

Lemme III. *Si* τ *ne reste pas constamment non-positif et si* $\tau' = \tau(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+2}; f)$ $x'_1 > x'_2 > \ldots > x'_{n+2}$ *est le maximum* (>0) *de* τ *dans l'intervalle* (a, b), τ' *est la meilleure approximation d'ordre* n *de* f *dans l'intervalle* (x'_{n+2}, x'_1).

Soit P le polynome de meilleure approximation de degré n sur les points $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+2}$. Nous allons montrer que P est le polynome de meilleure approximation de degré n de f dans l'intervalle (x'_{n+2}, x'_1). Pour cela il faut et il suffit de démontrer que la fonction $f_1 = f - P$ reste comprise entre $-\tau'$ et τ' dans (x'_{n+2}, x'_1). Prenons le point $x'_{j-1} > x > x'_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, n+2$, $x'_0 = x'_1$, $x'_{n+3} = x'_{n+2}$. Nous avons

$$\tau(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{j-1}, x, x'_{j+1}, \ldots, x'_{n+2}\,;\, f_1) \leqq \tau'.$$

---

(1) Nous faisons usage des notations employées dans nos précédents travaux. V est le déterminant de **Vandermonde** et U ce qu'on obtient de ce déterminant lorsqu'on remplace les éléments x_i de la dernière colonne par $f(x_i)$ respectivement.

(2) **E. Borel** *«Leçons sur les fonctions de variables réelles»* Paris (1905), Chap. IV.

(3) **Ch. de la Vallée Poussin** *«Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle»*, Paris (1919), Chap. VI.

Mais

$$\tau(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{j-1}, x, x'_{j+1}, \ldots, x'_{n+1}; f_1) =$$

$$= \tau' + \frac{(-1)^{n-j+2} V(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{j-1}, x'_{j+1}, \ldots, x'_{n+2}) \, [f_1(x) - (-1)^{j-1}\tau']}{\sum_{i=1}^{n+2} |V(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{i-1}, x'_{i+1}, \ldots, x'_{n+2})|}$$

où dans la somme du dénominateur en remplace x'_j par x.

Nous avons donc

$$(-1)^{j-1}[f_1(x) - (-1)^{j-1}\tau'] \leq 0, \qquad x \subset (x'_{j+1}, x'_{j-1}),$$

ce qui démontre la propriété.

On démontre exactement de la même manière que

Lemme IV. *Si* τ *ne reste pas constamment non-négatif et si* $\tau'' = \tau(x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n+2}; f), x''_1 > x''_2 > \ldots > x''_{n+2}$ *est le minimum* (< 0) *de* τ *dans l'intervalle* (a, b), $-\tau''$ *est la meilleure approximation d'ordre* n *de* f *dans l'intervalle* (x''_{n+2}, x''_1).

Remarquons que dans les deux lemmes les points $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+2}$ resp. $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n+2}$ sont des points où $f - T_n$ atteint avec des signes alternés, la valeur $\max |f - T_n|$, T_n et le maximum étant pris dans l'intervalle (x'_{n+2}, x'_1) resp. (x''_{n+2}, x''_1).

Lemme V. *Si la fonction continue* f *n'est pas d'ordre* n *dans l'intervalle* (a, b), *on peut trouver un sous-intervalle* (c, d) *de* (a, b) *tel que si* τ_1 (> 0), τ_2 (< 0) *sont le maximum et le minimum de* τ *dans* (c, d) *on ait* $\tau_1 = -\tau_2$.

Soient toujours

$$0 < \tau' = \max_{(a,b)} \tau, \; 0 > \tau'' = \min_{(a,b)} \tau$$

Si nous avons $\tau' = -\tau''$ la propriété est démontrée (c, d) = (a, b). Supposons que $\tau' > -\tau''$. Nous pouvons trouver, d'après le lemme IV un intervalle (a', b') où

$$\min_{(a', b')} \tau = \tau'', \; \max_{(a', b')} = \tau'_1 \leq -\tau''$$

Si $\tau'_1 = -\tau''$ la propriété est démontrée, (c, d) = (a', b'). Supposons que $\tau'_1 < -\tau''$ et soit

$$\max_{(a_1, b_1)} \tau = \tau^*_1, \; \min_{(a_1 b_1)} \tau = \tau^*_2$$

où

$$a_1 = \frac{a + \lambda a'}{1 + \lambda}, \; b_1 = \frac{b + \lambda b'}{1 + \lambda}, \quad \lambda \subset (0, +\infty)$$

Mais, $\tau^*_1 + \tau^*_2$ est évidemment une fonction continue de λ et

$$\tau^*_1 + \tau^*_2 = \tau' + \tau'' > 0, \qquad \text{pour } \lambda = 0,$$
$$\tau^*_1 + \tau^*_2 \to \tau'_1 + \tau'' < 0, \qquad \text{pour } \lambda \to +\infty.$$

Il existe donc une valeur positive de λ pour laquelle $\tau^*_1 = -\tau^*_2$, ce qui démontre la propriété.

On fait la démonstration de la même manière si $\tau' < -\tau''$ en se basant sur le lemme III.

12. Soit toujours f une fonction continue et supposons qu'elle ne soit pas d'ordre n dans (a, b). Considérons le sous-intervalle (c, d) défini par le lemme V.

Soit T_n le polynome de meilleure approximation de degré n de f dans (c, d). On peut alors trouver $n+2$ points $x'_1 > x'_2 > \ldots > x'_{n+2}$ où

(7) $$\tau(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+2}; f) = \tau_1$$

et où $f - T_n$ prend, avec des signes alternés, la valeur $\max |f - T_n|$. On peut aussi trouver $n+2$ points $x''_1 > x''_2 > \ldots > x''_{n+2}$ où

(8) $$\tau(x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n+2}; f) = \tau_2$$

et où $f - T_n$ prend, avec des signes alternés, les valeurs $\max |f - T_n|$.

Les relations (7), (8) et $\tau_1 = -\tau_2 > 0$ nous montrent qu'on peut toujours choisir parmi les points x'_i, x''_i une suite d'au moins $n+3$ points consécutifs où $f - T_n$ prend, avec des signes alternés la valeur $\max |f - T_n|$. Il en résulte que T_n *est aussi le polynome de meilleure approximation de degré* $n+1$ *de* f *dans* (c, d) donc

Lemme VI. *Si la fonction continue* f *n'est pas d'ordre* n *dans l'intervalle* (a, b), *on peut trouver un sous-intervalle de* (a, b) *où les polynomes de meilleure approximation* T_n, T_{n+1} *de degrés* n, $n+1$ *coïncident, donc où le polynome de meilleure approximation de degré* $n+1$ *est de degré effectif* $\leq n$.

Si nous remarquons que $T_n \equiv T_{n+1}$ a lieu aussi dans tout intervalle où f se réduit à un polynome de degré n, nous en déduisons le

Théorème IV. *Si* f *est une fonction continue dans l'intervalle fermé* (a, b) *et si, quel que soit le sous-intervalle fermé* (c, d) *de* (a, b), *le polynome de* **Tchebycheff** T_{n+1} *de degré* $n+1$ *de* f *dans* (c, d) *est effectivement de degré* $n+1$, *la fonction* f *est convexe ou concave d'ordre* n *dans* (a, b).

Remarquons que si f n'est pas d'ordre n dans l'intervalle (a, b), dans l'intervalle (c, d) du lemme V la fonction n'est certainement pas polynomiale d'ordre n. Il est facile d'en déduire le résultat suivant

Théorème V. *Si* f *est une fonction continue dans l'intervalle fermé* (a, b) *et si, quel que soit le sous-intervalle fermé* (c, d) *de* (a, b), *le polynome de* **Tchebycheff** T_n *de degré* n *de* f *dans* (c, d) *vérifie les égalités* $|f(c) - T_n(c)| = |f(d) - T_n(d)| = \max\limits_{(c,d)} |f - T_n|$, *la fonction* f *est d'ordre* n *dans* (a, b).

En effet, pour une fonction qui n'est pas d'ordre n il suffit de raccourcir un peu l'intervalle (c, d) du lemme V pour trouver un intervalle où la propriété n'est pas satisfaite.

Cernăuti, le 11 Avril 1939